Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина
Институт
фундаментального
образования

Л. Г. МАЛЫШЕВ
А. А. ПОВЗНЕР

МЕХАНИКА И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. ЗАДАЧИ, ИХ АНАЛИЗ И РЕШЕНИЕ

Практикум

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Л. Г. Малышев, А. А. Повзнер

Механика и теория относительности. Задачи, их анализ и решение

Практикум

Рекомендовано методическим советом
Уральского федерального университета
для студентов инженерно-технических
специальностей

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2021

УДК 535.13(075.8)
ББК 22.343я73
М20

Рецензенты:
кафедра общей физики РГППУ, доц, канд. физ.-мат. наук С. В. Анахов; проф., д-р физ.-мат. наук В. Е. Сидоров (кафедра физики, технологии и методики обучения физике и технологии УрГПУ)

Научный редактор — проф., д-р физ.-мат. наук А. В. Мелких

Малышев, Л. Г.

М20 Механика и теория относительности. Задачи, их анализ и решение : практикум / Л. Г. Малышев, А. А. Повзнер ; М-во науки и высш. обр. РФ. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2021. — 144 с.

ISBN 978-5-7996-3192-5

Издание «Механика и теория относительности. Задачи, их анализ и решение» предназначено для студентов УрФУ, обучающихся на физических и инженерно-физических направлениях подготовки, изучающих курс общей физики в соответствии с рабочей программой курса «Общая физика» и образовательными стандартами. Книга включает обсуждение основных физических законов и соотношений, на основе которых проводятся подробный анализ и решение большого числа задач и примеров. Использование студентами данного издание позволит улучшить уровень их подготовки по разделу курса «Физика».

Библиогр.: 4 назв. Рис. 67.

УДК 535.13(075.8)
ББК 22.343я73

ISBN 978-5-7996-3192-5

Введение

Изучение различных разделов физики базируется на понимании базовых законов, лежащих в основе этих направлений физики, и их взаимной связи. Законы содержат множество следствий более частного характера, описывающих конкретные физические явления. Их изучение связано с умением практического использования основных положений теории, их применением к конкретным физическим явлениям. Научиться этому можно лишь решая задачи, условия которых в той или иной степени моделируют реальную картину процессов и явлений. В данном пособии авторы стремились показать, как практически применять основные физические законы при помощи описания различных ситуаций как реальных, так и модельных. Все задачи в пособии сопровождаются анализом условий, подробными решениями и обсуждением полученных результатов.

1. Основные законы механики

1.1. Кинематические представления механики

Задача 1.1. Частица движется вдоль оси x так, что ее скорость зависит от времени по закону $x = \beta t(1 - \alpha t)$, где α и β — положительные постоянные. Найти:

а) зависимость от времени скорости и ускорения частицы;

б) путь S, пройденный частицей за время, в течение которого она вернется в исходное положение.

Решение. Для определения скорости и ускорения воспользуемся формулами

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \beta - 2\alpha\beta t,$$

$$v = |v_x|,$$

$$a_x \frac{dv_x}{dt} = -2\alpha\beta,$$

$$a = |a_x| = 2\alpha\beta.$$

Как следует из полученных соотношений, мы имеем равнозамедленное движение с начальной скоростью $v_{0x} = \beta$. Время t_1, затраченное частицей при ее движении до остановки, найдем из условия

$$v_x = \beta - 2\alpha\beta t_1 = 0,$$

$$t_1 = \frac{1}{2\alpha}.$$

Путь s_1, пройденный частицей при этом, легко определить:

$$s_1 = \beta t_1 \left(1 - \alpha t_1\right) = \frac{\beta}{4\alpha}.$$

Затем частица начинает двигаться в обратном направлении и проходит то же самое расстояние. Таким образом, пройденный путь s

$$s = 2s_1 = \frac{\beta}{2\alpha}.$$

Отметим, что время, в течение которого частица вернется в исходное положение, легко определить из условия $x = 0$:

$$x = \beta t\left(1 - \alpha t\right) = 0,$$

$$t = 0, \qquad t = \frac{1}{\alpha}.$$

Задача 1.2. Скорость частицы, движущейся в направлении оси x, описывается формулой $v = \alpha\sqrt{x}$, где α — положительная постоянная. В начальный момент времени частица имеет координату $x_0 = 0$. Найти:

а) скорость и ускорение частицы как функции времени;

б) среднюю скорость частицы на начальном участке ее траектории длиной s.

Решение. Запишем условие задачи в виде

$$\frac{dx}{dt} = \alpha\sqrt{x},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \alpha dt,$$

и проинтегрируем обе части этого равенства:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^t \alpha dt,$$

$$2\sqrt{x} = \alpha t,$$

$$x = \frac{\alpha^2 t^2}{4}.$$

Скорость и ускорение найдем по обычным формулам

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha^2 t}{2},$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha^2}{2}.$$

По определению средняя скорость определяется выражением

$$\langle v \rangle = \frac{x}{t},$$

и тогда

$$\langle v \rangle = \frac{\alpha^2 t}{4} = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{x} = \alpha\sqrt{s}.$$

Задача 1.3. Ускорение, с которым вагон метро движется от станции A до станции B, изменяется по закону $a = b - cx$, где x — расстояние от станции A, b и c — положительные постоянные. Найти расстояние между станциями. Чему равна максимальная скорость вагона?

Решение. Преобразуем формулу для ускорения к виду

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v,$$

и тогда

$$vdv = (b - cx)dx.$$

Проинтегрируем это выражение

$$\int_0^v v\,dv = \int_0^x (b - cx)\,dx,$$

$$\frac{v^2}{2} = bx - \frac{cx^2}{2},$$

и получим

$$v = \sqrt{(2b - cx)x}.$$

На станциях вагон останавливается, и его скорость равна нулю. Из полученного выражения следует, что $v = 0$ при $x = 0$ (это станция А) и при $x = 2b/c$. Это и есть расстояние между станциями:

$$s = \frac{2b}{c}.$$

Для нахождения максимальной скорости воспользуемся условием экстремума

$$\frac{dv}{dx} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{(2b - cx)x}\right) = 0,$$

$$\frac{2b - 2cx}{\sqrt{(2b - cx)x}} = 0,$$

$$x_m = \frac{b}{c},$$

и тогда

$$v_m = \sqrt{(2b - cx_m)x_m} = \frac{b}{\sqrt{c}}.$$

Впрочем, к этому результату можно было прийти проще — ясно, что максимальная скорость вагона будет в точке, находящейся на половине пути между станциями, то есть $x_m = s/2$.

Задача 1.4. Положение точки на плоскости определяется радиус-вектором **r**, зависящим от времени по закону $\mathbf{r} = \alpha t\mathbf{i} + \beta t^2\mathbf{j}$ (α и β — постоянные). Определить:

а) скорость и ускорение точки как функции времени;

б) уравнение ее траектории $y\,(x)$;

в) угол φ, образованный векторами **v** и **a**, как функцию времени.

Решение. Общая формула для радиус-вектора **r** имеет вид

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

а это означает, что

$$x = \alpha t, \qquad y = \beta t^2.$$

Тогда

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \alpha, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = 2\beta t,$$

$$\mathbf{v} = \alpha\mathbf{i} + 2\beta t\mathbf{j}, \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2},$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0, \qquad a_y = \frac{da_y}{dt} = 2\beta,$$

$$\mathbf{a} = 2\beta\mathbf{j}, \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2\beta.$$

Уравнение траектории получим так:

$$y = \beta\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 = \frac{\beta x^2}{\alpha^2}.$$

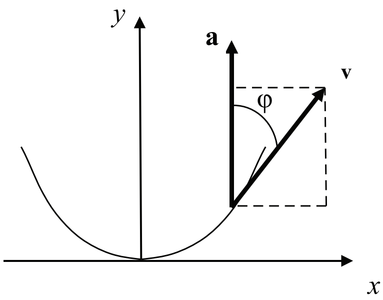

Рис. 1.1

Вид этой зависимости изображен на рис. 1.1, из которого видно, что угол φ, образованный векторами **v** и **a**, легко определить из соотношения

$$\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\alpha}{2\beta t}.$$

Задача 1.5. Траектория тела, брошенного в поле тяжести Земли, описывается уравнением $y = \alpha x - \beta x^2$ (α и β — постоянные). Найти начальную скорость v_0 тела.

Решение. Ускорение свободного падения направлено вниз, поэтому движение тела в горизонтальном направлении происходит с постоянной скоростью v_x, и $x = v_x t$. Тогда

$$y = \alpha v_x t - \beta\alpha^2 t^2.$$

Вертикальная составляющая скорости

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \alpha v_x - 2\beta v_x^2 t,$$

и в момент броска ($t = 0$) $v_y = \alpha v_x$.

Таким образом,

$$v_0 = v_x \sqrt{1+\alpha^2}.$$

Согласно условию задачи

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -2\beta v_x^2 = -g,$$

$$v_x = \sqrt{\frac{g}{2\beta}},$$

ответ будет таким:

$$v_0 = \sqrt{\frac{g\left(1+\alpha^2\right)}{2\beta}}.$$

Задача 1.6. Аэростат поднимается вверх с постоянной скоростью подъема v_0. Под влиянием ветра у него появляется горизонтальная составляющая скорости v_x, меняющаяся с высотой y по закону $v_x = \alpha y$ (y — постоянная). Найти:

а) величину горизонтального сноса аэростата $x(y)$;

б) зависимость ускорения аэростата (а также тангенциальной и нормальной составляющих) от его высоты.

Решение. Согласно условию задачи $y = v_0 t$, поэтому

$$v_x = \alpha v_0 t,$$
$$\frac{dx}{dt} = \alpha v_0 t,$$
$$dx = \alpha v_0 t dt,$$
$$\int_0^x dx = \int_0^t \alpha v_0 t dt,$$
$$x = \frac{\alpha v_0 t^2}{2} = \frac{\alpha y^2}{2v_0}.$$

Для того, чтобы вычислить ускорение аэростата, найдем

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \alpha v_0 t, \qquad a_x = \frac{dv_x}{dt} = \alpha v_0,$$
$$v_y = v_0, \qquad a_y = 0,$$

и тогда

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \alpha v_0.$$

Модуль скорости аэростата

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_0 \sqrt{(\alpha t)^2 + 1},$$

тангенциальную составляющую ускорения найдем по формуле

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{\alpha v_0^2 t}{\sqrt{(\alpha t)^2 + 1}} = \frac{\alpha^2 y}{\sqrt{\left(\frac{\alpha y}{v_0}\right)^2 + 1}}.$$

Учитывая, что $a^2 = a_\tau^2 + a_n^2$, вычислим нормальную составляющую ускорения

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \frac{\alpha v_0}{\sqrt{\left(\frac{\alpha y}{v_0}\right)^2 + 1}}.$$

Задача 1.7. Положение точки на плоскости определяется радиус-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{m}\sin\omega t + \mathbf{n}\cos\omega t$. Вектора **m** и **n** взаимно перпендикулярны и направлены вдоль осей x и y. Найти ускорение точки и уравнение ее движения в этой плоскости.

Решение. Ускорение точки найдем по формуле

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\omega^2\left(\mathbf{m}\sin\omega t + \mathbf{n}\cos\omega t\right) = -\omega^2\mathbf{r}.$$

Направление вектора **a** противоположно направлению радиус-вектора в каждой точке — это поле центральных сил.

Радиус-вектор имеет проекции на оси, равные

$$x = m\sin\omega t, \qquad y = n\cos\omega t,$$

поэтому

$$\sin\omega t = \frac{x}{m}, \qquad \cos\omega t = \sqrt{1-\left(\frac{x}{m}\right)^2},$$

$$\frac{y}{n} = \cos\omega t = \sqrt{1-\left(\frac{x}{m}\right)^2},$$

$$\left(\frac{y}{n}\right)^2 = 1-\left(\frac{x}{m}\right)^2,$$

$$\left(\frac{y}{n}\right)^2 + \left(\frac{x}{m}\right)^2 = 1.$$

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат.

Задача 1.8. Скорость частицы, движущейся по дуге окружности, увеличивается по закону $v = \alpha t$, где $\alpha = 0{,}50$ м/с^2. Чему равно ее ускорение в тот момент времени, когда частица пройдет путь, равный $n = 0{,}10$ длины окружности?

Решение. При криволинейном движении ускорение частицы имеет две составляющие — тангенциальную и нормальную и определяется соотношением $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}$. Тангенциальная составляющая

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=\alpha.$$

Нормальная составляющая $a_n=v^2/r$, где r — радиус окружности, по которой движется частица. Ее скорость определим по формуле

$$s=\frac{v^2-v_0^2}{2a_\tau}=\frac{v^2}{2\alpha},$$

$$v=\sqrt{2\alpha s},$$

в которой s — путь, пройденный частицей:

$$s=\frac{2\pi r}{n}.$$

Найдем нормальную составляющую ускорения

$$a_n=\frac{v^2}{r}=\frac{2\alpha s}{r}=4\pi n\alpha,$$

и получим ответ:

$$a=\alpha\sqrt{1+(4\pi n)^2}=0{,}8\ \text{м/с}^2.$$

Задача 1.9. При вращении диска вокруг закрепленной оси величина угла его поворота возрастает со временем по закону $\varphi=\beta t^2$, где $\beta=0{,}20$ рад/с. В момент времени $t=2{,}5$ с скорость точек, находящихся на ободе диска, равна $v=0{,}65$ м/с. Чему равно полное ускорение этих точек?

Решение. Найдем угловые скорость и ускорение диска

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}=2\beta t,\qquad \varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=2\beta,$$

и выразим тангенциальную составляющую a_τ полного ускорения

$$a_\tau = \varepsilon r = 2\beta r.$$

Нормальная составляющая полного ускорения

$$a_n = \omega^2 r = 4\beta^2 t^2 r.$$

Таким образом,

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 2\beta r\sqrt{1+\left(2\beta t^2\right)^2}.$$

Входящий в это выражение радиус диска найдем из соотношения

$$v = \omega r = 2\beta t r,$$

$$r = \frac{v}{2\beta t}.$$

Тогда

$$a = \frac{v}{t}\sqrt{1+\left(2\beta t^2\right)^2} = 0{,}7\ \text{м/с}^2.$$

Задача 1.10. Пуля, двигаясь в стволе длиной $l = 0{,}5$ м, совершает внутри него $n = 2{,}0$ оборота и вылетает из ствола, имея скорость $v = 320$ м/с. Чему равна угловая скорость вращения пули при вылете, если ее движение в стволе можно считать равноускоренным?

Решение. При равноускоренном движении

$$l = \langle v \rangle t = \frac{v}{2}t,$$

поэтому время движения пули в стволе

$$t = \frac{2l}{v}.$$

Аналогичное соотношение можно записать и для вращательного движения:

$$\varphi = \langle \omega \rangle t = \frac{\omega}{2} t,$$

и тогда

$$\omega = \frac{2\varphi}{t} = \frac{\varphi v}{l} = \frac{2\pi n v}{l} = 8{,}0 \cdot 10^3 \text{ рад/с}.$$

Задача 1.11. Вращение диска вокруг закрепленной оси происходит по закону $\varphi = at - bt^3$, где $a = 6{,}0$ рад/с, $b = 2{,}0$ рад/с^3. Вычислить:

а) время вращения диска до остановки;
б) среднюю угловую скорость и среднее угловое ускорение в процессе вращения диска;
в) угловое ускорение диска в момент его остановки.

Решение. Угловая скорость вращения диска меняется со временем по закону

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = a - 3bt^2.$$

В момент остановки $\omega = 0$, поэтому время движения диска до остановки

$$t_{\text{ост}} = \sqrt{\frac{a}{3b}}.$$

За это время диск совершит поворот на угол

$$\varphi_{\text{ост}} = a t_{\text{ост}} - b t_{\text{ост}}^3,$$

и тогда среднее значение угловой скорости

$$\langle \omega \rangle = \frac{\varphi_{\text{ост}}}{t_{\text{ост}}} = \frac{2a}{3} = 4 \text{ рад/с}.$$

Вращение диска происходит с угловым ускорением, которое также зависит от времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -6\beta t,$$

и в момент остановки

$$\varepsilon_{\text{ост}} = -6\beta t_{\text{ост}} = -2\sqrt{3ab} = -12 \text{ рад/с}^2.$$

Угловое ускорение изменяется по линейному закону от нуля до $\varepsilon_{\text{ост}}$, и поэтому

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\varepsilon_{\text{ост}}}{2} = -\sqrt{3ab} = -6 \text{ рад/с}^2.$$

Задача 1.12. Вращение диска вокруг закрепленной оси происходит с угловым ускорением $\varepsilon = \alpha t$, где α = 2,0·10^2 рад/с^3. Найти момент времени τ, при котором вектор его полного ускорения образует с вектором скорости угол φ = 60^0.

Решение. Полное ускорение представляет собой векторную сумму тангенциального и нормального ускорений и, как следует из рис. 1.2,

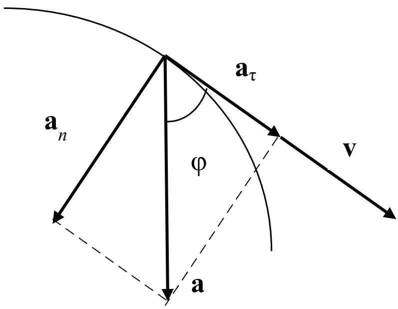

Рис. 1.2

$$\tan\varphi = \frac{a_n}{a_\tau}.$$

Тангенциальная составляющая полного ускорения $a_\tau = \varepsilon r$ — нормальная составляющая $a_n = \omega^2 r$. Поэтому

$$\tan\varphi = \frac{\omega^2}{\varepsilon}.$$

Формулу для угловой скорости ω в момент времени τ получим, взяв интеграл

$$\omega = \int_0^\tau \varepsilon dt = \int_0^\tau \alpha t dt = \frac{\alpha\tau^2}{2},$$

и тогда

$$\tan\varphi = \frac{\alpha\tau^3}{4},$$

$$\tau = \sqrt[3]{\frac{4\tan\varphi}{\alpha}} = 7 \text{ с.}$$

Задача 1.13. Барабан, имеющий закрепленную ось, вращается с угловой скоростью ω_0. В момент времени $t = 0$ на него начинает действовать тормозящий момент, приводящий к появлению углового ускорения $\varepsilon = -\alpha\sqrt{\omega}$, где α — положительная постоянная. Найти время τ вращения барабана до остановки и его среднюю угловую скорость за это время.

Решение. Угловое ускорение связано с угловой скоростью соотношением

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -\alpha\sqrt{\omega}.$$

Преобразуем и проинтегрируем его:

$$\frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} = -\alpha dt,$$

$$\int\limits_{\omega_0}^{0} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} = -\alpha\int\limits_0^t dt,$$

$$2\left(\sqrt{\omega} - \sqrt{\omega_0}\right) = -\alpha t,$$

$$\omega = \left(\sqrt{\omega_0} - \alpha t\right)^2.$$

Барабан остановится, когда $\omega = 0$, поэтому время $\tau = 2\sqrt{\omega_0}\,/\,\alpha$. За это время он совершит поворот на угол

$$\varphi = \int\limits_0^\tau \omega dt = \int\limits_0^\tau \left(\sqrt{\omega_0} - \alpha t\right)^2 dt =$$

$$= \omega_0\tau - \frac{\alpha\sqrt{\omega}\tau^2}{2} + \frac{\alpha^2\tau^3}{12},$$

и его средняя угловая скорость за этот промежуток времени будет равна

$$\langle\omega\rangle = \frac{\varphi}{\tau} = \omega_0 - \frac{\alpha\sqrt{\omega}\tau}{2} + \frac{\alpha^2\tau^2}{12} = \frac{\omega_0}{3}.$$

Задача 1.14. Диск, имеющий закрепленную ось, вращается с угловой скоростью $\omega = \omega_0 - \alpha\varphi$, где φ — величина угла поворота, ω_0 и α — положительные постоянные. Как изменяется со временем угол φ и угловая скорость вращения диска?

Решение. Угловая скорость связана с углом поворота

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - \alpha\varphi.$$

Приведем это выражение к виду, удобному для интегрирования,

$$\frac{d\varphi}{\omega_0 - \alpha\varphi} = dt,$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\varphi - \omega_0 / \alpha} = -\alpha\int_0^t dt,$$

$$\ln\frac{\varphi - \omega_0 / \alpha}{\omega_0 / \alpha} = -\alpha t.$$

Отметим, что аргумент логарифма — величина положительная, то есть должно выполняться неравенство $\varphi \prec \omega_0 / \alpha$, и продолжим преобразования:

$$\frac{\varphi - \omega_0 / \alpha}{\omega_0 / \alpha} = \exp(-\alpha t),$$

$$\varphi = \frac{\omega_0}{\alpha}\left(1 - \exp(-\alpha t)\right).$$

Действительно, при любом конечном значении t неравенство $\varphi \prec \omega_0 / \alpha$ выполняется, и лишь при $t \to \infty$ оно переходит в равенство $\varphi = \omega_0 / \alpha$.

Угловая скорость вращения диска меняется со временем по закону

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \exp(-\alpha t).$$

Задача 1.15. При *замедленном* движении частицы по дуге окружности радиуса *r*, ее нормальная и тангенциальная составляющие ускорения одинаковы по модулю в каждый момент времени. Вычислить скорость частицы и модуль ее ускорения как функцию пройденного ею пути *s*, если начальная скорость частицы равна v_0.

Решение. Нормальная составляющая ускорения $a_n = v^2/r$, а тангенциальную можно представить в виде

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v.$$

Поскольку движение замедленное $a_\tau \prec 0$:

$$a_\tau = -a_n,$$

$$\frac{dv}{ds}v = -\frac{v^2}{r},$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{ds}{r},$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{1}{r}\int_0^s ds,$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -\frac{s}{r},$$

$$v = v_0 \exp(-s/r).$$

Модуль ускорения найдем по формуле

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{2}a_n = \sqrt{2}\,\frac{v^2}{r} =$$

$$= \sqrt{2}\,\frac{v_0^2}{r}\exp\left(-\frac{2s}{r}\right).$$

Интересный вопрос: как долго будет двигаться частица и какой путь она пройдет до остановки? Ответ: моменту остановки соответствует скорость $v = 0$, а это соответствует бесконечному пути $(s \to \infty)$.

1.2. Динамические принципы механики

Задача 1.16. Два тела с соотношением масс $m_1/m_2 = \eta = 2/3$ связаны нитью, перекинутой через блок (рис. 1.3). Найти направление движения и модуль ускорения тел, если коэффициент трения о плоскость $\mu = 0{,}10$, угол $\alpha = 30^0$, и первоначально тела находились в состоянии покоя.

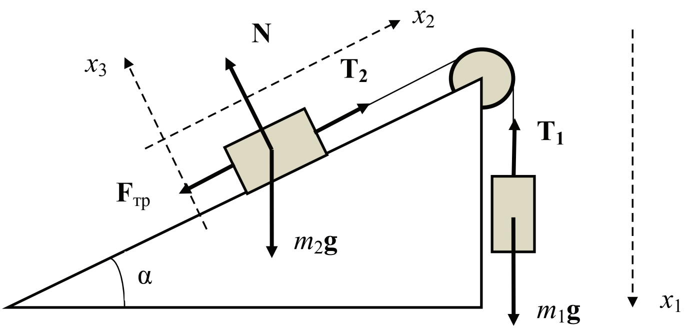

Рис. 1.3

Решение. Для того чтобы выяснить направление движения тел, предположим, что сила трения, действующая на тело массы m_2, отсутствует. В этом случае уравнения движения этих тел будут иметь вид

$$m_1\mathbf{a}_1 = m_1\mathbf{g} + \mathbf{T}_1,$$
$$m_2\mathbf{a}_2 = m_2\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{T}_2.$$

Спроецируем их на оси x_1 и x_2 соответственно, учтем, что $a_1 = a_2 = a$ и $T_1 = T_2 = T$, и будем считать, что первое тело опускается. Тогда

$$m_1 a = m_1 g - T,$$
$$m_2 a = T - m_2 g \sin\alpha.$$

Сложим эти уравнения и получим

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2 \sin\alpha)g,$$
$$(\eta + 1)a = (\eta - \sin\alpha)g,$$
$$a = g\frac{\eta - \sin\alpha}{\eta + 1} = 1\ \text{м/с}^2 \succ 0.$$

Мы видим, что первое тело действительно будет опускаться, а второе — подниматься по наклонной плоскости, и поэтому действующая на него сила трения будет направлена так, как это изображено на рис. 1.3.

Величина этой силы равна $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$, и уравнения движения тел принимают вид

$$m_1 a' = m_1 g - T,$$
$$m_2 a' = T - m_2 g \sin\alpha - m_2 g \cos\alpha.$$

После несложных преобразований мы получим ответ

$$a = g\frac{\eta - \sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\eta + 1} = 0{,}5\ \text{м/с}^2.$$

Отметим, что если

$$\mu \geq \frac{\eta - \sin\alpha}{\cos\alpha} = 0{,}19,$$

то тела останутся в состоянии покоя за счет силы трения покоя, действующей на второе тело.

Задача 1.17. На доске массой m_1 находится тело массой m_2 (рис. 1.4). Под действием горизонтальной силы $F = \alpha t$, $(\alpha - \text{const})$ доска с телом начинают движение по горизонтальной поверхности. Найти зависимость от времени ускорений доски a_1 и тела a_2 в процессе движения, если коэффициент трения между ними равен μ. Трение между доской и поверхностью отсутствует.

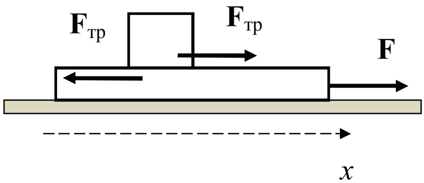

Рис. 1.4

Решение. Доска с находящимся на ней телом будут двигаться как одно целое до тех пор, пока будет выполняться неравенство $F \leq F_{тр} = \mu m_2 g$. При этом их ускорения равны: $a_1 = a_2$. Затем тело начнет скользить по доске, и его ускорение a_2 будет меньше a_1.

Момент времени t_0, соответствующий началу скольжения тела по доске, определяется из условия

$$F = F_{тр},$$

$$\alpha t_0 = \mu m_2 g,$$

$$t_0 = \frac{\mu m_2 g}{\alpha}.$$

До этого момента уравнение движения доски с телом имеет вид

$$(m_1 + m_2) a_1 = \alpha t,$$

$$a_1 = a_2 = \frac{\alpha t}{m_1 + m_2}.$$

При $t \geq t_0$ уравнения движения для доски и тела принимают форму

$$m_1 a_1 = F - F_{\text{тр}},$$
$$m_2 a_2 = F_{\text{тр}},$$

и тогда

$$a_1 = \frac{\alpha t - \mu m_2 g}{m_1},$$
$$a_2 = \mu g.$$

Задача 1.18. Наклонная плоскость закреплена в точке O и имеет вертикальный упор A, позволяющий менять ее угол относительно горизонтали (рис. 1.5). Из точки A начинает скользить вниз шайба. Какому значению угла α соответствует минимальное время скольжения шайба до точки O? Значение коэффициента трения $\mu = 0{,}140$.

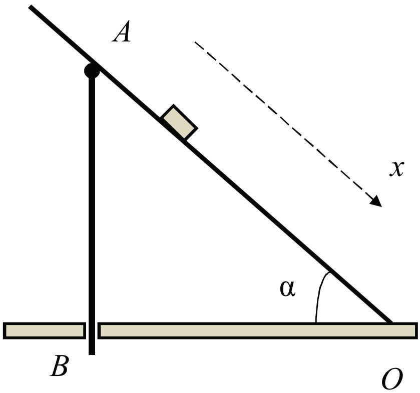

Рис. 1.5

Решение. Уравнение движения, записанное в проекции на ось x, имеет вид

$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha,$$
$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

При равноускоренном движении

$$l = \frac{at^2}{2}, \qquad l = |AO| = \frac{|BO|}{\cos\alpha},$$
$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{2\frac{|BO|}{g\cos\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}.$$

Для того, чтобы найти минимальное время, это громоздкое выражение необходимо исследовать на экстремум. Проще, однако, сделать это для знаменателя подкоренного выражения — при его максимальном значении время будет минимальным:

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\cos\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\right) = 0,$$
$$-\sin\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + \cos\alpha(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = 0,$$
$$\cos 2\alpha + \mu\sin 2\alpha = 0,$$
$$\tan\alpha = \frac{1}{\mu},$$
$$\alpha = 49^0.$$

Задача 1.19. Тело массы m движется по горизонтальной поверхности с постоянной скоростью под действием силы $\mathbf{F}$, направленной под углом α к горизонту (рис. 1.6). При каком угле величина этой силы будет минимальной? Коэффициент трения μ.

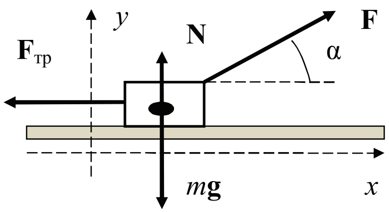

Рис. 1.6

Решение. По второму закону Ньютона

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{тр}}.$$

В проекциях на оси x и y это уравнение принимает вид

$$0 = F\cos\alpha - F_{\text{тр}},$$
$$0 = -mg + N + F\sin\alpha.$$

Здесь мы учли, что $a = 0$, поскольку движение происходит с постоянной скоростью.

Далее:

$$N = mg - F\sin\alpha,$$
$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha),$$
$$F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) = 0,$$
$$F = \frac{\mu mg}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha}.$$

Для того, чтобы найти минимальную силу, это выражение необходимо исследовать на экстремум. Проще, однако, сделать это для знаменателя — при его максимальном значении сила будет минимальна:

$$\frac{d}{d\alpha}(\mu\sin\alpha + \cos\alpha) = 0,$$
$$\mu\cos\alpha - \sin\alpha = 0,$$
$$\tan\alpha = \mu.$$

Несложно найти и величину этой силы:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}},$$
$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}},$$

и тогда

$$F = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Задача 1.20. К бруску массы m, лежащему на горизонтальной поверхности, приложили силу $F = bt$, направленную горизонтально (b — постоянная величина). На какое расстояние переместится брусок за время t? Коэффициент трения равен μ.

Решение. Брусок начнет движение не сразу, а лишь после того, как сила F превысит максимальное значение силы трения покоя, действующей на него. Определим этот момент из условия

$$bt_0 = \mu mg,$$

$$t_0 = \frac{\mu mg}{b}.$$

Дальше, как обычно:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{bt}{m},$$

$$v = \int_{t_0}^{t} a dt = \frac{b}{m}\int_{t_0}^{t} t dt = \frac{b}{2m}\left(t^2 - t_0^2\right),$$

$$s = \int_{t_0}^{t} v dt = \frac{b}{2m}\int_{t_0}^{t}\left(t^2 - t_0^2\right)dt = \frac{b}{2m}\left(\frac{1}{3}\left(t^3 - t_0^3\right) - t_0^2\left(t - t_0\right)\right).$$

После несложных преобразований эта формула приобретает окончательный вид:

$$s = \frac{b}{6m}\left(t - t_0\right)^3,$$

где $t_0 = \mu mg/b$.

Задача 1.21. Автомобиль начинает движение по горизонтальной круговой траектории радиуса R, имея постоянное тангенциальное ускорение a_τ. Коэффициент трения между колесами и дорогой равен μ. Какое расстояние пройдет автомобиль до того, как начнется его скольжение по асфальту?

Решение. В процессе движения по круговой траектории скорость автомобиля возрастает, и увеличивается его нормальное и полное ускорения. Ускорение обусловлено существованием силы трения, обеспечивающей сцепление колес с дорогой, и не нарушается до тех пор, пока сила трения не достигает своего наибольшего значения, равного $F_{\text{тр}} = \mu mg$. Поэтому максимальное полное ускорение автомобиля

$$a_{\text{макс}} = \frac{F_{\text{тр}}}{m} = \mu g.$$

С другой стороны,

$$a_{\text{макс}} = \sqrt{a_\tau^2 + a_{n\ \text{макс}}^2} = \sqrt{a_\tau^2 + \left(\frac{v_{\text{макс}}^2}{R}\right)^2},$$

$$\mu g = \sqrt{a_\tau^2 + \left(\frac{v_{\text{макс}}^2}{R}\right)^2},$$

$$\frac{v_{\text{макс}}^2}{R} = \sqrt{(\mu g)^2 - a_\tau^2},$$

$$v_{\text{макс}}^2 = a_\tau R\sqrt{\left(\frac{\mu g}{a_\tau}\right)^2 - 1}.$$

Скорость автомобиля изменяется по линейному закону $(a_\tau = \text{const})$, поэтому

$$s = \frac{v_{\text{макс}}^2}{2a_\tau},$$

и мы получаем ответ:

$$s = \frac{R}{2}\sqrt{\left(\frac{\mu g}{a_\tau}\right)^2 - 1}.$$

Из него следует, что задача имеет смысл только тогда, когда сила сцепления колес с дорогой удовлетворяет условию $a_\tau \prec \mu g$.

Задача 1.22. Координата движущегося тела зависит от времени по закону $x = \alpha t^2 - \beta t^3$. В начальный момент времени $(t = 0)$ на тело действует сила $F_x = F_0$. Найти значение этой силы в моменты поворота тела и в момент его возвращения в исходную точку.

Решение. Движение тела описывается законами

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2\alpha t - 3\beta t^2,$$
$$a_x = 2\alpha - 6\beta t,$$

а это значит, что на тело действует сила

$$F_x = ma_x = 2m\alpha\left(1 - 3\frac{\beta}{\alpha}t\right).$$

Согласно условию при $t = 0$ $F_x = F_0$, поэтому $F_0 = 2m\alpha$, и тогда

$$F_x = F_0\left(1 - \frac{3\beta}{\alpha}t\right).$$

Моменту поворота соответствует значение $v_x = 0$, следовательно, имеем два значения:

$$2\alpha t - 3\beta t^2 = 0,$$
$$t_1 = 0, \qquad t_2 = \frac{2\alpha}{3\beta}.$$

В первом случае $F_x = F_0$, а во втором $F_x = -F_0$.

Момент времени, когда тело вновь окажется в исходном положении, найдем из условия $x = 0$:

$$\alpha t^2 - \beta t^3 = 0,$$
$$t^2(\alpha - \beta t) = 0,$$
$$t = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Таким образом, значение силы в момент возвращения тела в исходную точку

$$F_x = -2F_0.$$

Задача 1.23. Плоская траектория частицы массы m описывается уравнениями $x = A\sin\omega t$, $y = B\cos\omega t$. Найти направление и модуль действующей на нее силы.

Решение. Найдем зависимость скорости и ускорения частицы от времени:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t, \qquad v_y = -B\omega\sin\omega t,$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2\sin\omega t, \qquad a_y = -B\omega^2\cos\omega t,$$

и определим вектор силы, действующей на частицу,

$$\mathbf{F} = m\left(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}\right) = -m\omega^2\left(A\sin\omega t + B\cos\omega t\right) =$$

$$= -m\omega^2\left(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}\right) = -m\omega^2\mathbf{r}.$$

Она направлена к центру системы отсчета — называется центральной.

Ее модуль равен

$$F = m\omega^2 r = m\omega^2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Задача 1.24. На покоящееся тело массы m в момент $t = 0$ начинает действовать сила $F = F_0\cos\omega t$. Найти:

а) наибольшую скорость тела;

б) время до его первой остановки;

в) путь, пройденный телом.

Решение. Тело движется с ускорением

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_0}{m}\cos\omega t,$$

и его скорость изменяется со временем по закону

$$v = \int_0^t a\,dt = \frac{F_0}{m}\int_0^t \cos\omega t\,dt = \frac{F_0}{m}\sin\omega t.$$

Скорость обращается в нуль при $\omega t_n = \pi n$, и его первая остановка произойдет в момент $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$.

За это время тело пройдет путь

$$s = \int_0^{t_1} v\,dt = \frac{F_0}{m\omega}\int_0^{t_1}\sin\omega t\,dt = \frac{F_0}{m\omega^2}\left(1-\cos\omega t_1\right) = \frac{2F_0}{m\omega^2}.$$

Задача 1.25. На корабле, плывущем со скоростью v_0, отключили двигатель, и, вследствие вязкого трения, его скорость стала падать. Сила сопротивления, действующая на корабль, зависит от скорости по закону $F = -rv$ (r — постоянная). Найти скорость корабля как функцию времени и расстояние, пройденное им до остановки.

Решение. По второму закону Ньютона

$$ma = F,$$

$$m\frac{dv}{dt} = -rv,$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{r}{m}dt,$$

$$\int_0^t \frac{dv}{v} = -\frac{r}{m}\int_0^t dt,$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -\frac{r}{m}t,$$

и тогда

$$v = v_0\exp\left(-\frac{r}{m}t\right).$$

Из этой формулы следует, что скорость корабля стремится к нулю лишь при $t \to \infty$. Однако это не значит, что он пройдет бесконечно большое расстояние:

$$s = \int_0^t v dt = \int_0^t v_0 \exp\left(-\frac{r}{m}t\right) dt =$$

$$= \frac{mv_0}{r}\left(1 - \exp\left(-\frac{r}{m}t\right)\right).$$

При $t \to \infty$ $s = \dfrac{mv_0}{r}$.

Задача 1.26. Цепочка висит на нити так, что ее нижний конец касается поверхности стола. После перерезания нити она падает на стол. Какой импульс цепочка передает при этом столу? Длина цепочки $l = 1{,}40$ м, ее масса $m = 1.00$ кг.

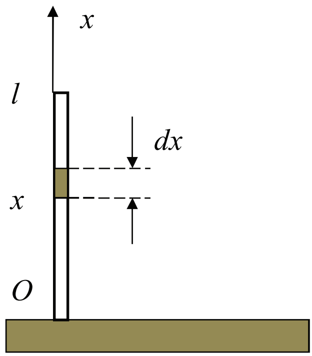

Рис. 1.7

Решение. Выделим на цепочке малый элемент dx, который находится над столом на высоте x (рис. 1.7). Его массу найдем как

$$dm = \frac{mdx}{l}.$$

Его скорость в момент падения на стол по закону равноускоренного движения $v = \sqrt{2gx}$, и поэтому импульс dp, передаваемый столу этим элементом цепи, определится формулой

$$dp = dmv = \frac{mdx}{l}\sqrt{2gx}.$$

Таким образом, полный импульс, передаваемый цепочкой столу, будет равен

$$p = \int_0^l \frac{m}{l}\sqrt{2gx}dx = \frac{m}{l}\sqrt{2g}\,\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^l =$$

$$= \frac{2}{3}m\sqrt{2gl} = 3{,}5 \text{ кг}\cdot\text{м/с}.$$

1.3. Работа и мощность

Задача 1.27. Цепочка, длиной $l = 1{,}5$ м, лежит на столе так, что ее часть, имеющая длину ηl, свешивается с края стола (рис. 1.8). При $\eta \geq 1/3$ цепочка приходит в движение и соскальзывает со стола. Чему при этом равна работа сил трения? Масса цепочки $m = 0{,}80$ кг.

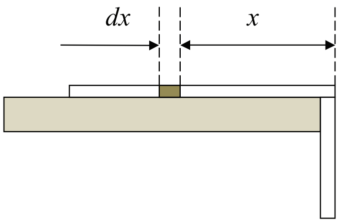

Рис. 1.8

Решение. Для начала найдем коэффициент трения цепочки о поверхность стола. При $\eta = 1/3$ сила трения, действующая на участок цепи, находящийся на столе, уравновешивает силу тяжести, действующую на ее свешивающуюся часть:

$$\frac{2}{3}\mu mg = \frac{1}{3}mg, \qquad \mu = \frac{1}{2}.$$

Выделим на цепочке малый элемент dx, который находится на расстоянии x от края стола. Его масса $dm = mdx/l$, и на него при движении действует сила трения $dF_{\text{тр}} = \mu dm = \mu mdx / l.$

Эта сила совершит работу

$$dA_{\text{тр}} = -dF_{\text{тр}}x = -\frac{\mu mg}{l}xdx.$$

При соскальзывании всей цепи, эта работа будет равна

$$A_{\text{тр}} = -\frac{\mu mg}{l}\int\limits_0^{(1-\eta)l} x dx = -\frac{1}{2}\mu mgl\left(1-\eta\right)^2 = -1,3 \text{ Дж.}$$

Задача 1.28. Тело массы m начинает движение по круговой траектории радиуса R. Нормальная составляющая его ускорения зависит от времени по закону $a_n = \alpha t^2$ (α — постоянная). Как меняется со временем суммарная мощность действующих на тело сил? Найти ее среднее значение в интервале времени от нуля до τ секунд?

Решение. Результирующую силу, действующую на тело, можно представить в виде векторной суммы сил

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\tau + \mathbf{F}_n,$$

где $\mathbf{F}_\tau$ и $\mathbf{F}_n$ — тангенциальная и нормальная составляющие этой силы, направленные по касательной к траектории и нормально к ней соответственно.

Мощность силы определяется формулой

$$P = \mathbf{F}\mathbf{v} = \left(\mathbf{F}_\tau + \mathbf{F}_n\right)\mathbf{v} = F_\tau v = ma_\tau v.$$

По условию

$$a_n = \alpha t^2,$$

$$\frac{v^2}{R} = \alpha t^2, \qquad v = \sqrt{\alpha R}t,$$

и тогда

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \sqrt{\alpha R}.$$

Таким образом, полная мощность

$$P = ma_\tau v = m\alpha Rt.$$

Среднее значение мощности в интервале от нуля до τ секунд найдем легко — поскольку мощность меняется линейно, то

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2}m\alpha R\tau.$$

Задача 1.29. Бруску, лежащему на горизонтальной поверхности, придали начальную скорость $v_0 = 1{,}50$ м/с. Найдите среднее значение средней мощности модуля силы трения? Масса бруска $m = 1{,}00$ кг, коэффициент трения $\mu = 0{,}27$.

Решение. Мощность модуля силы трения

$$\langle P\rangle = \langle |F_{\text{тр}}| v\rangle = \mu mg\langle v\rangle = \frac{1}{2}\mu mgv_0 = 2{,}0 \text{ Вт}.$$

При расчетах мы учли, что скорость бруска убывает по линейному закону до нуля.

Задача 1.30. При движении тела массы m по горизонтальной поверхности его коэффициент трения увеличивается с ростом пройденного расстояния s по закону $\mu = \alpha s$, где α — постоянная величина. Определить наибольшее значение модуля мгновенной мощности силы трения, если начальная скорость тела была равна v_0.

Решение. Мощность модуля силы трения определяется формулой

$$P = |F_{\text{тр}}| v = \mu mgv = \alpha mgsv.$$

В начале движения тела при $s = 0$, а также в момент его конечной остановки $(v = 0)$, мощность равна нулю, и, следовательно, в некотором промежуточном положении она принимает максимальное значение.

Движение тела происходит с ускорением

$$a = -\mu g = -\alpha gs.$$

С другой стороны,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = -\frac{vdv}{ds}.$$

Таким образом,

$$\frac{vdv}{ds} = -\alpha gs,$$

и тогда

$$vdv = -\alpha gsds.$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\int_{v_0}^{v} vdv = -\int_{0}^{s} \alpha gsds,$$

$$\frac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) = -\frac{1}{2}\alpha gs^2,$$

тогда

$$v = \sqrt{v_0^2 - \alpha gs^2},$$

и выражение для мощности принимает вид

$$P = \alpha mgs\sqrt{v_0^2 - \alpha gs^2}.$$

Исследуем его на экстремум

$$\frac{dP}{ds} = \alpha mg\left(\left(v_0^2 - \alpha gs^2\right)^{1/2} + \frac{s}{2}\left(v_0^2 - \alpha gs^2\right)^{-1/2}(-2\alpha gs)\right) = 0,$$

и, решая это уравнение, получим

$$s = v_0\sqrt{2\alpha g}.$$

Таким образом, наибольшее значение модуля мгновенной мощности силы трения будет равно

$$P = \alpha mgs\sqrt{v_0^2 - \alpha gs^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\sqrt{\alpha g}}.$$

1.4. Закон сохранения механической энергии

Задача 1.31. Скорость электропоезда массы m после начала его движения зависит от пройденного им пути s по закону $s = \alpha\sqrt{s}$, α — постоянная. Найти работу, совершенную всеми силами, действующими на электропоезд, за первые t секунд его движения.

Решение. Воспользуемся соотношением

$$v = \frac{ds}{dt} = \alpha\sqrt{s}$$

и преобразуем его к виду

$$\frac{ds}{\sqrt{s}} = \alpha dt.$$

Тогда

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{s}} = \int_0^t \alpha dt,$$

$$2\sqrt{s} = \alpha t,$$

$$s = \frac{\alpha^2 t^2}{4}.$$

Скорость электропоезда

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\alpha^2 t}{2},$$

и его кинетическая энергия, равная работе всех сил:

$$A = W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\alpha^4 t^2}{8}.$$

Задача 1.32. При движении частицы по круговой траектории радиуса R ее кинетическая энергия меняется по закону $W_k = \alpha s^2$, где s — путь, пройденный частицей, α — постоянная. Найти зависимость действующей на частицу силы от пройденного пути.

Решение. Полное ускорение силы, действующей на частицу, имеет тангенциальную и нормальную составляющие. Тангенциальное ускорение обусловлено тангенциальной составляющей силы F_τ, работа которой меняет кинетическую энергию частицы:

$$dA = F_\tau ds = dW_k = d\left(\alpha s^2\right) = 2\alpha s ds,$$

$$F_s = 2\alpha s.$$

Нормальная составляющая силы

$$F_n = ma_n = \frac{mv^2}{R}.$$

Найдем ее из условия

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \alpha s^2,$$

$$mv^2 = 2\alpha s^2,$$

$$F_n = \frac{mv^2}{R} = \frac{2\alpha s^2}{R}.$$

Определим силу, действующую на частицу, по формуле

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = 2\alpha s\sqrt{1+\left(s/R\right)^2}.$$

Задача 1.33. Две пружины, имеющие коэффициенты упругости κ_1 и κ_2 соответственно, соединены последовательно. Пружины деформировали так, что их общая длина увеличилась на величину Δl. Найти работу внешней силы.

Решение. Силы упругости, возникающие при деформации пружин, согласно третьему закону Ньютона равны, поэтому

$$\kappa_1 \Delta l_1 = \kappa_2 \Delta l_2,$$

$$\Delta l_2 = \frac{\kappa_1 \Delta l_1}{\kappa_2}, \qquad \Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2.$$

Отсюда

$$\Delta l_1 = \frac{\kappa_2 \Delta l}{\kappa_1 + \kappa_2}, \qquad \Delta l_2 = \frac{\kappa_1 \Delta l}{\kappa_1 + \kappa_2}.$$

Работа внешней силы увеличивает энергию деформации пружин, следовательно

$$A = \Delta W_{p1} + \Delta W_{p2} = \frac{\kappa_1 \Delta l_1^2}{2} + \frac{\kappa_2 \Delta l_2^2}{2} = \frac{\kappa_1 \kappa_2 \Delta l^2}{2(\kappa_1 + \kappa_2)}.$$

Задача 1.34. К телу, находящемуся на поверхности Земли, приложена вертикальная сила, меняющаяся с высотой его подъема y как $F = 2mg(1 - \alpha y)$, $\alpha \succ 0$. Найти потенциальную энергию тела на первой половине его подъема, а также работу, совершенную силой F.

Решение. Помимо силы F на тело действует сила тяжести, и их равнодействующая равна $F_\Sigma = (1 - 2\alpha y)mg$ (рис. 1.9). Ее проекция на ось y остается положительной до тех пор, пока $y \le 1/2\alpha$, и тело при этом движется ускоренно. Затем проекция этой силы становится отрицательной, и скорость тела уменьшается до нуля в верхней точке y_m ее траектории.

Обратим внимание на то, что скорость тела в начале движения и в верхней точке равна нулю, а это значит, что приращение кинетической энергии тела равно нулю, и, следовательно, работа равнодействующей силы также обращается в нуль.

Работу этой силы можно определить графически как площадь под прямой на рис. 1.9 с учетом знака минус на участке от y_1 до y_m. Из этого рисунка видно, что точка y_1 соответствует половине максимальной высоты y_m подъема в этой точке $F_\Sigma = 0$.Таким образом,

$$y_1 = \frac{1}{2\alpha}, \qquad W_p = mgy_1 = \frac{mg}{2\alpha}.$$

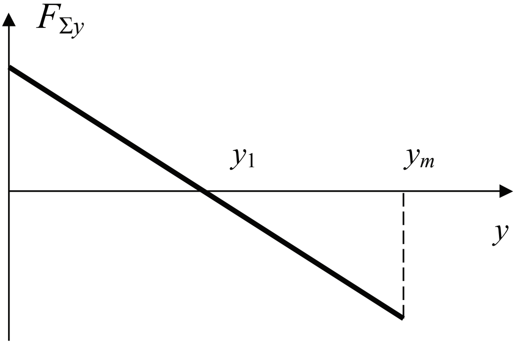

Рис. 1.9

Для ответа на второй вопрос достаточно взять интеграл

$$A = \int_0^{y_1} F dy = \int_0^{y_1} 2mg\left(1 - \alpha y\right) dy = 2mgy_1 - mg\alpha y_1^2 = \frac{3mg}{4\alpha}.$$

Задача 1.35. Частица, находящаяся в центральном силовом поле, обладает потенциальной энергией $W_p(r) = a/r^2 - b/r$, $a \succ 0,\ b \succ 0$, r — расстояние от силового центра. Найти положение равновесия частицы и наибольшую силу притяжения частицы к силовому центру.

Решение. График зависимости потенциальной энергии $W_p(r)$ от r (сплошная линия на рис. 1.10) имеет минимум при $r = r_0$, что указывает на положение устойчивого равновесия в этой точке. Найдем его, исследуя на экстремум функцию $W_p(r)$:

$$\frac{dW_p(r)}{dr} = 0,$$

$$-\frac{2a}{r^3} + \frac{b}{r^2} = 0, \qquad r_0 = \frac{2a}{b}.$$

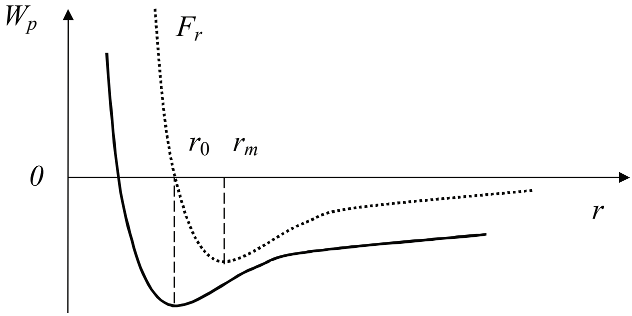

Рис. 1.10

В центральном поле на частицу действует сила

$$F = -\frac{dW_p(r)}{dr} = \frac{2a}{r^3} - \frac{b}{r^2},$$

график которой изображен на рис. 1.10 пунктирной линией. Ее вид напоминает силу, с которой взаимодействуют между собой молекулы, включающую в себя как силу притяжения (она положительна), так и силу отталкивания, имеющую знак минус. Из рисунка 1.10 видно, что наибольшая сила притяжения к силовому центру действует на частицу в точке $r = r_m$, положение которой найдем из условия

$$\frac{dF}{dr} = 0,$$

$$-\frac{6a}{r^4} + \frac{2a}{r^3} = 0, \qquad r_m = \frac{3a}{b},$$

и тогда

$$F_{\text{макс}} = \frac{b^3}{27a^2}.$$

Задача 1.36. Потенциальная энергия частицы при ее плоском движении зависит от координат по закону $W_p = \alpha xy$, где α = 0,19 мДж/м^2. Ее скорость в точке с координатами (3,0 м, 4,0 м) равна v_1 = 3,0 м/с, а в точке, имеющей координаты (5,0 м, 6,0 м), v_2 = 4,0 м/с. Чему равна при этом работа, совершенная неконсервативными силами?

Решение. Работа, совершенная неконсервативными силами, изменяет полную механическую энергию частицы:

$$A = \Delta W = \left(W_{k2} + W_{p2}\right) - \left(W_{k1} + W_{p1}\right) =$$

$$= \left(\frac{mv_2^2}{2} + \alpha x_2 y_2\right) - \left(\frac{mv_1^2}{2} + \alpha x_1 y_1\right) = 6 \text{ мДж}.$$

Задача 1.37. Тело находится на высоте *H* на вершине гладкого спуска, имеющего в конце горизонтальный участок на высоте *h* (рис. 1.11). При каком значении *h* тело упадет на максимальном расстоянии от точки отрыва?

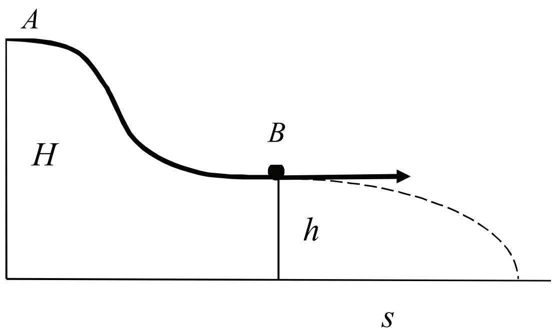

Рис. 1.11

Решение. По закону сохранения энергии

$$W_A = W_B,$$

$$mgH = mgh + \frac{mv^2}{2},$$

$$v = \sqrt{2g(H-h)}.$$

В момент отрыва скорость v тела направлена горизонтально, и время его полета определится формулой

$$h = \frac{gt^2}{2}, \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Это означает, что тело упадет на землю на расстоянии

$$s = vt = 2\sqrt{h(H-h)}.$$

Его максимальное значение определим из условия

$$\frac{ds}{dt} = 0,$$

$$\left(h(H-h)\right)^{-1/2}(H-2h) = 0.$$

Тогда

$$h = \frac{H}{2}, \qquad s = H.$$

Задача 1.38. На легком стержне, имеющем вертикальную ось вращения (точка A на рис. 1.12), находится муфта массой m, прикрепленная пружинкой длиной l_0 к этой точке. Стержень раскрутили до угловой скорости ω. Какую работу совершили внешние силы, если пружинка имеет жесткость κ ? Трение отсутствует.

Решение. Поскольку массой стержня можно пренебречь, работа при раскручивании идет на увеличение кинетической энергии муфты и появление потенциальной энергии, возникающей при растяжении пружины,

$$A = \frac{mv^2}{2} + \frac{\kappa \Delta l^2}{2}.$$

В этом выражении $v = \omega l$ и $\Delta l = l - l_0$ (см. рис. 1.12).

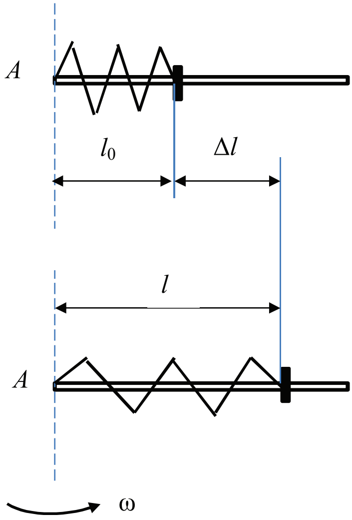

Рис. 1.12

Роль центростремительной силы, под действием которой происходит вращение муфты, играет сила упругости, возникающая при деформации пружины:

$$m\omega^2 l = \kappa\left(l - l_0\right),$$

$$l = \frac{\kappa l_0}{\kappa - m\omega^2}.$$

Тогда

$$\Delta l = \frac{m\omega^2 l_0}{\kappa - m\omega^2}, \qquad v = \frac{\kappa m l_0}{\kappa - m\omega^2}.$$

Таким образом, работа, совершаемая внешними силами, будет равна

$$A = \frac{m\omega^2 l_0^2\left(\kappa + m\omega^2\right)}{2\left(\kappa - m\omega^2\right)^2}.$$

Задача 1.39. Две частицы массами m_1 и m_2 движутся в лабораторной системе отсчета K вдоль оси x со скоростями v_1 и v_2 соответственно. С какой скоростью должна двигаться система отсчета K', в которой их кинетическая энергия примет минимальное значение? Чему оно равно?

Решение. Воспользуемся классическим законом преобразования скоростей, согласно которому

$$v_1' = v_1 - V, \qquad v_2' = v_2 - V,$$

где V — скорость движения системы K'.

Тогда кинетическая энергия W_k частиц в этой системе отсчета

$$W_k = W_{k1} + W_{k2} = \frac{m_1 (v_1 - V)^2}{2} + \frac{m_2 (v_2 - V)^2}{2}.$$

Для ответа на вопрос, поставленный в задаче, необходимо исследовать это выражение на экстремум и найти скорость системы K':

$$\frac{dW_k}{dV} = 0,$$

$$-m_1 (v_1 - V) - m_2 (v_2 - V) = 0,$$

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Вычислим значение кинетической энергии частиц в системе K':

$$W_k = \frac{m_1 (v_1 - V)^2}{2} + \frac{m_2 (v_2 - V)^2}{2} =$$

$$= \frac{m_1 m_2^2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_1^2 m_2 (v_2 - v_1)^2}{2(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Это и будет ответом на второй вопрос этой задачи.

Задача 1.40. Какую начальную скорость v_2 необходимо сообщить телу, находящемуся на поверхности, чтобы оно покинуло земное поле тяготения?

Решение. Эту скорость, которая называется *второй космической скоростью*, мы найдем из следующих соображений.

На тело, находящееся в поле тяжести Земли, действует гравитационная сила

$$F = -G\frac{mM}{r^2},$$

где m — масса тела, $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг — масса Земли, r — расстояние от тела до центра Земли, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2 / кг^2 — гравитационная постоянная. Знак минус в этом выражении указывает на то, что она направлена к силовому центру, то есть противоположно радиус-вектору **r**, указывающему положение тела.

Эта сила является центральной и связана с потенциальной энергией тела соотношением

$$F = -\frac{dW_p}{dr},$$

поэтому

$$W_p = -\int F dr = \int G\frac{mM}{r^2} dr = -G\frac{mM}{r} + C.$$

Постоянную интегрирования C легко определить из условия $\left(W_p\right)_\infty = 0$ при $r \to \infty$. Тогда $C = 0$, и потенциальная энергия тела вблизи поверхности Земли, имеющей радиус $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ м/с,

$$W_{p1} = -G\frac{mM}{R}.$$

Для того, чтобы тело покинуло земное поле тяготения, его необходимо «вытащить» из потенциальной ямы, сообщив ему кинетическую энергию W_k

$$W_{p1} + W_k = \left(W_p\right)_\infty.$$

Таким образом,

$$W_k = \left(W_p\right)_\infty - W_{p1},$$

$$\frac{mv_2^2}{2} = G\frac{mM}{R},$$

$$v_2 = \sqrt{2G\frac{M}{R}} = 11 \text{ км/с}.$$

Она отличается от первой космической скорости $v_1 = 7{,}9 \cdot 10^3$ м/с в $\sqrt{2}$ раза.

1.5. Закон сохранения импульса

Задача 1.41. На рис. 1.13 изображена центробежная машина, к вертикальной оси которой при помощи нити прикреплена замкнутая цепочка A. При вращении оси с угловой скоростью $\omega = 35$ рад/с нить образует с вертикалью угол $\vartheta = 45^0$. Найдите силу натяжения T нити. На каком расстоянии r_C от оси вращения находится центр масс цепочки? Масса цепочки равна 0,36 кг.

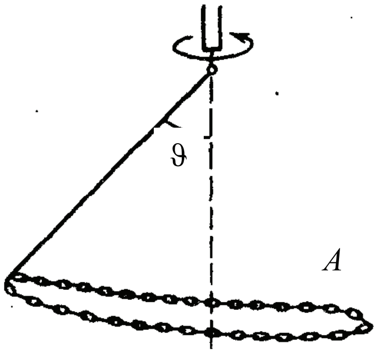

Рис. 1.13

Решение. На цепочку действуют две силы — тяжести и натяжения нити (рис. 1.14). Ее вращение происходит в горизонтальной плоскости, а это говорит о том, что вертикальная составляющая результирующей силы, действующей на цепочку, равна нулю:

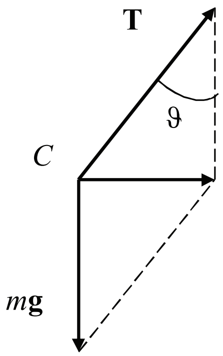

Рис. 1.14

$$T\cos\vartheta - mg = 0,$$

$$T = \frac{mg}{\cos\vartheta} = 5 \text{ Н}.$$

Движение цепочки по окружности происходит под действием центростремительной силы, приложенной к ее центру масс. Роль этой силы выполняет горизонтальная составляющая силы натяжения нити:

$$m\omega^2 r_C = mg\tan\vartheta,$$

$$r_C = \frac{g\tan\vartheta}{\omega^2} = 0{,}8 \text{ см}.$$

Задача 1.42. Человек массы *m* находится на неподвижной лодке, имеющей массу *M*. После того, как он перешел по ней на новое место, находящееся на расстоянии l_1 от первоначального, лодка совершила перемещение l_2 относительно воды. Чему оно равно?

Решение. По закону сохранения импульса

$$0 = mv_1 - Mv_2,$$

$$Mv_2 = mv_1,$$

где v_1 и v_2 — скорости движения человека и лодки относительно берега в процессе движения человека. По закону сложения скоростей скорость v_1' человека относительно лодки $v_1' = v_1 + v_2$, и тогда

$$v_1 = v_1' - v_2,$$

$$Mv_2 = mv_1' - mv_2,$$

$$v_2 = \frac{m}{m+M}v_1'.$$

Совершенные при этом перемещения

$$\int_0^{\Delta t} v_2 dt = \int_0^{\Delta t} \frac{m}{m+M} v_1' dt,$$

$$l_2 = \frac{m}{m+M} l_1.$$

Задача 1.43. Пушка, находящаяся на гладкой наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α, начинает свободно скользить вниз. После того, как она прошла путь l, из нее произвели выстрел. Снаряд вылетел горизонтально с импульсом $\mathbf{p}$. Пушка при этом остановилась. Найти длительность τ выстрела, считая, что масса снаряда много меньше массы пушки.

Решение. На пушку действуют две внешние силы — тяжести и реакции опоры, поэтому по второму закону Ньютона

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\mathbf{g} + \mathbf{N},$$

$$d\mathbf{p} = (m\mathbf{g} + \mathbf{N})dt,$$

$$\int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} d\mathbf{p} = \int_0^{\tau} (m\mathbf{g} + \mathbf{N})dt,$$

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = m\mathbf{g}\tau + \mathbf{N}\tau.$$

Спроецируем эти вектора на ось, параллельную наклонной плоскости

$$p\cos\alpha - p_0 = mg\sin\alpha\tau,$$

и получим

$$\tau = \frac{p\cos\alpha - p_0}{mg\sin\alpha}.$$

В этом выражении мы не знаем импульс p_0, который имела пушка перед выстрелом, но его легко найти, используя известную формулу равноускоренного движения

$$l = \frac{v^2 - v_0^2}{2a},$$

в которой $v_0 = 0, \quad a = g\sin\alpha$.

Тогда

$$p_0 = Mv = M\sqrt{2gl\sin\alpha},$$

и мы получаем ответ

$$\tau = \frac{p\cos\alpha - M\sqrt{2gl\sin\alpha}}{mg\sin\alpha}.$$

Задача 1.44. Две частицы массами m_1 и m_2 находятся на гладкой горизонтальной плоскости и соединены нерастяжимой нитью длиной l. Первоначально первая частица покоится, а вторая имеет скорость v, направленную перпендикулярно нити. Чему равна сила натяжения нити?

Решение. Мы имеем замкнутую систему, имеющую импульс $\mathbf{p}$ и обладающую кинетической энергией W_k:

$$\mathbf{p} = m_2\mathbf{v},$$

$$W_k = \frac{m_2 v^2}{2}.$$

Эту кинетическую энергию можно представить в виде суммы двух слагаемых — кинетической энергии W_k' частиц в системе их центра масс (в *C*-системе) и кинетической энергии поступательного движения этой системы как целого:

$$W_k = W_k' + \frac{(m_1 + m_2)V_C^2}{2}.$$

В этом выражении V_C — скорость движения центра масс системы

$$V_C = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2} = \frac{p}{m_1 + m_2},$$

и тогда

$$W_k{}' = W_k - \frac{p^2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 v^2}{2} - \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)} = \\ = \frac{m_2 v^2}{2} - \frac{m_2^2 v^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 m_2 v^2}{2(m_1 + m_2)}. \qquad (1.1)$$

В системе центра масс суммарный импульс частиц равен нулю — они вращаются относительно этого центра (точка C на рис. 1.15) со скоростями v_1' и v_2'.

Положение этой точки определяется соотношениями

$$m_1 r_1 = m_2 r_2,$$
$$r_1 + r_2 = l,$$

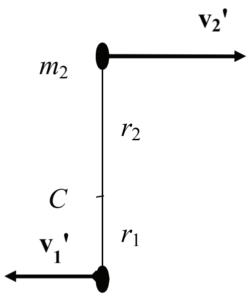

Рис. 1.15

и тогда

$$r_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}, \qquad r_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}.$$

Кинетическая энергия частиц в C-системе

$$W_k = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \\ = \frac{m_1 \omega^2 r_1^2}{2} + \frac{m_2 \omega^2 r_2^2}{2} = \frac{m_1 m_2 \omega^2 l^2}{2(m_1 + m_2)}. \qquad (1.2)$$

Из сопоставления выражений (1.1) и (1.2) следует, что $\omega = v/l$.

Интересующую нас силу натяжения определим по формуле

$$T = m_1\omega^2 r_1 = m_2\omega^2 r_2 = \frac{m_1 m_2 v^2}{(m_1 + m_2)l}.$$

Задача 1.45. Цепочка массы $m = 1$ кг, имеющая длину $l = 1,4$ м, висит на нити, касаясь своим нижним концом поверхности стола (рис. 1.16). После перерезания нити цепочка упала на стол. Чему равен импульс, переданный цепочкой столу?

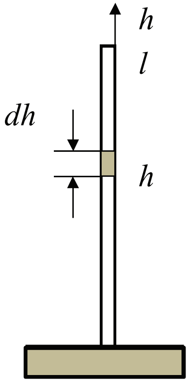

Рис. 1.16

Решение. Представим цепочку в виде множества малых элементов, имеющих размер dh, и выберем один из них, находящийся на высоте h над поверхностью стола. Его массу легко определить из соотношения

$$\frac{dm}{m} = \frac{dh}{l},$$

$$dm = \frac{mdh}{l}.$$

Этот элемент цепи падает на поверхность стола со скоростью, которую мы определим по известной формуле равнопеременного движения

$$h = \frac{v^2 - v_0^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}, \qquad v = \sqrt{2gh}.$$

Импульс dp, передаваемый этим элементом столу,

$$dp = dmv = \frac{m}{l}\sqrt{2gh}dh$$

и полный импульс, переданный цепочкой столу, будет равен

$$p = \int_0^l \frac{m}{l}\sqrt{2gh}dh = \frac{2}{3}m\sqrt{2gl} = 3,5 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Задача 1.46. При столкновении двух частиц, двигавшихся со скоростями $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ и $\mathbf{v}_2 = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$, образовалась составная частица. Определить ее скорость, если соотношение масс частиц равно $\eta = m_2/m_1 = 2{,}0$.

Решение. Используя закон сохранения импульса, найдем вектор скорости составной частицы

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{v},$$

$$\mathbf{v} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\mathbf{v}_1 + \eta\mathbf{v}_2}{1+\eta} = \frac{10\mathbf{i} - 7\mathbf{j}}{3}.$$

Модуль скорости составной частицы определим по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{\sqrt{100+49}}{3} \approx 4 \text{ м/с}.$$

Задача 1.47. Брус массы M подвешен на стропах длиной l так, как это показано на рис. 1.17. При попадании в него пули массы m, стропы отклоняются от вертикали на угол θ. Найти скорость пули v? Какая часть ее кинетической энергии (в процентах) выделилась в виде тепла?

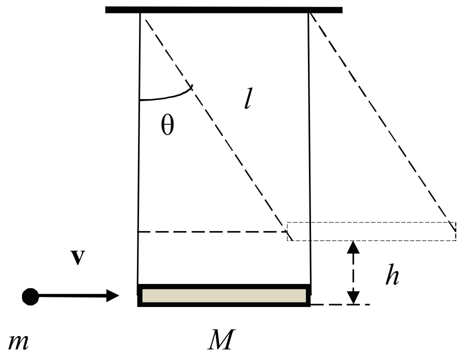

Рис. 1.17

Решение. Предположим, что скорость пули до попадания в брус равна v. Скорость u бруса с попавшей в него пулей найдем, используя закон сохранения импульса:

$$mv = (M+m)u,$$

$$u = \frac{mv}{M+m}.$$

Кинетическая энергия, которую приобрел при этом брус, перейдет в его потенциальную энергию при отклонении строп на угол θ:

$$\frac{(M+m)u^2}{2} = (M+m)gh,$$

$$u = \sqrt{2gh},$$

$$\frac{mv}{M+m} = \sqrt{2gh},$$

$$v = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gh}.$$

Нам осталось найти h

$$h = l - l\cos\theta = 2l\sin^2\frac{\theta}{2}$$

и записать ответ

$$v = \frac{2(M+m)}{m}\sqrt{gl}\sin\frac{\theta}{2}.$$

Тепло, выделившееся при попадании пули, равно убыли ее кинетической энергии

$$\Delta W_k = W_{k0} - W_k = \frac{mv^2}{2} - \frac{(M+m)u^2}{2},$$

или в относительных единицах

$$\eta = \frac{\Delta W_k}{W_{k0}} = 1 - \frac{M+m}{m}\left(\frac{u}{v}\right)^2 =$$

$$= 1 - \frac{m}{M+m} = \frac{M}{M+m}.$$

Необходимо отметить: по условию задачи мы имеем брус, подвешенный на двух стропах. А почему бы не взять просто тело, висящее на одной нити? В нашем случае движение бруса поступательное, а, другом — оно будет вращательным. Там другие законы.

Задача 1.48. На гладкую плоскость положили преграду в виде горки с гладкими поверхностями, имеющую высоту h и массу M (рис. 1.18). В направлении преграды запускают небольшой диск массы m. Чему равна минимальная скорость, при которой диск преодолеет эту преграду?

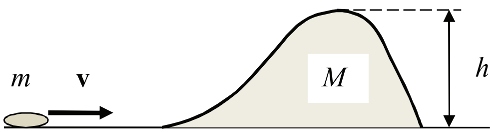

Рис. 1.18

Решение. При решении подобных задач часто забывают о том, что при попадании диска на преграду она тоже начнет двигаться с некоторой скоростью, и скорость диска на вершине горки должна быть больше (или в пределе — равна) скорости преграды относительно плоскости.

Рассмотрим эту ситуацию в системе центра масс этих тел (в C-системе отсчета), которая движется относительно лабораторной системы отсчета K со скоростью

$$\mathbf{V}_C = \frac{m\mathbf{v}}{M+m},$$

или в скалярном виде

$$V_C = \frac{mv}{M+m}.$$

Эта скорость остается неизменной, вследствие выполнения закона сохранения импульса.

В C-системе импульс диска

$$p_1' = mv' = m\left(v - V_C\right) = \frac{Mv}{M+m}.$$

Система центра масс обладает полезным свойством: суммарный импульс тел в C-системе равен нулю. Поэтому импульс преграды $p_2' = -p_1'$.

До столкновения эти тела обладали в C-системе кинетическими энергиями, сумма которых

$$W_k' = \frac{\left(p_1'\right)^2}{2m} + \frac{\left(p_2'\right)^2}{2M} = \frac{\left(p_1'\right)^2}{2M}\left(\frac{M}{m} + 1\right) = \frac{Mmv^2}{2\left(M+m\right)}.$$

После того, как диск оказался на вершине горки и там остановился (предельный случай!), кинетическая энергия тел в C -системе обратилась в нуль — тела образуют единое целое и покоятся в системе их центра масс. Но у диска появилась потенциальная энергия $W_p = mgh$, и по закону сохранения механической энергии

$$\frac{Mmv^2}{2\left(M+m\right)} = mgh,$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh\left(M+m\right)}{M}} = \sqrt{2gh\left(1 + \frac{m}{M}\right)}.$$

Задача 1.49. Частица массы m_1 налетает на покоившийся атом массы m_2 . В результате неупругого столкновения они разлетаются под углом θ друг к другу (рис. 1.19), имея кинетические энергии W_{k1} и W_{k2}. При этом атом переходит в возбужденное состояние. Найти энергию этого состояния $W_{\text{возб}}$, а также пороговую энергию $W_{\text{пор}}$, которой должна обладать частица для того, чтобы этот процесс был возможен.

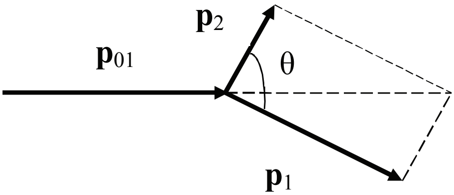

Рис. 1.19

Решение. По закону сохранения импульса

$$\mathbf{p}_{01} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2,$$

где $\mathbf{p}_{01}$ — импульс частицы до столкновения, $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ — импульсы частицы и атома после столкновения.

В скалярной форме это равенство принимает вид

$$p_{01}^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\theta.$$

Воспользуемся связью импульса и кинетической энергии $p^2 = 2mW_k$, и перепишем его в виде

$$2m_1W_{k0} = 2m_1W_{k1} + 2m_2W_{k2} + 2\sqrt{m_1m_2W_{k1}W_{k2}}\cos\theta,$$

или

$$W_{k0} = W_{k1} + \frac{m_2}{m_1}W_{k2} + \sqrt{\frac{m_2}{m_1}W_{k1}W_{k2}}\cos\theta.$$

Энергетический баланс в этом столкновении

$$W_{k0} = W_{k1} + W_{k2} + W_{\text{возб}},$$

и тогда

$$W_{\text{возб}} = W_{k0} - W_{k1} - W_{k2} =$$
$$= W_{k2}\left(\frac{m_2}{m_1} - 1\right) + \sqrt{\frac{m_2}{m_1} W_{k1} W_{k2}} \cos\theta.$$

Для того чтобы найти пороговую энергию $W_{\text{пор}}$, которой должна обладать частица для того, чтобы этот процесс был возможен, воспользуемся результатами, полученными в предыдущей задаче. Суммарная кинетическая энергия частицы и атома в системе их центра масс

$$W_k' = \frac{(p_1')^2}{2m_1} + \frac{(p_2')^2}{2m_2} = \frac{(p_1')^2}{2m_2}\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) =$$
$$= \frac{m_1 m_2 v^2}{2(m_1 + m_2)} = W_{k0}\frac{m_2}{m_1 + m_2},$$
$$W_{k0} = W_k'\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right).$$

Порог этой реакции определяется соотношением $W_k' = W_{\text{возб}}$, поэтому

$$W_{\text{пор}} = W_{\text{возб}}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right).$$

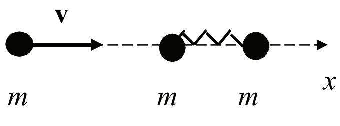

Рис. 1.20

Задача 1.50. Частица с кинетической энергией W_{k0} налетает на гантель, образованную двумя упруго связанными частицами такой же массы (рис. 1.20). В результате столкновения частица отскакивает в противоположном направлении, имея кинетическую энергию W_k. Найти энергию возникших колебаний частиц, образующих гантель?

Решение. Согласно закону сохранения импульса

$$p_0 = -p + p_C,$$

или

$$p_C = p_0 + p,$$

где p_0 и p — импульсы налетающей частицы до и после столкновения, p_C — импульс центра масс частиц, образующих гантель.

С точки зрения закона сохранения энергии

$$W_{k0} = W_k + W_{kC} + W_{\text{кол}},$$

или

$$W_{\text{кол}} = W_{k0} - W_k - W_{kC}.$$

Используем связь импульса и кинетической энергии, и перепишем это равенство в виде

$$W_{\text{кол}} = W_{k0} - W_k - \frac{p_C^2}{2(2m)} = W_{k0} - W_k - \frac{(p_0 + p)^2}{4m} =$$

$$= W_{k0} - W_k - \frac{1}{2}\left(\frac{p_0^2}{2m} + 2\frac{p_0 p}{2m} + \frac{p^2}{2m}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(W_{k0} - 3W_k - 2\sqrt{W_{k0}W_k}\right).$$

Задача 1.51. Нейтрон, имеющий импульс p_0, упруго рассеялся под углом θ к первоначальному направлению его движения на покоившемся атоме массы m (рис. 1.21). Найти модуль импульса p нейтрона после столкновения.

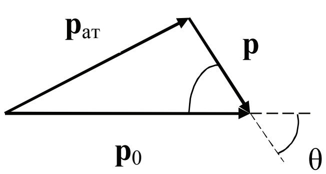

Рис. 1.21

Решение. По закону сохранения импульса

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_{\text{ат}} + \mathbf{p},$$
$$\mathbf{p}_{\text{ат}} = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p},$$

или в скалярном виде

$$p_{\text{ат}}^2 = p_0^2 + p^2 - 2p_0 p\cos\theta, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{p}_{\text{ат}}$ — импульс, приобретенный атомом в результате столкновения.

По закону сохранения энергии

$$W_{k0} = W_k + W_{k\text{ат}},$$
$$W_{k\text{ат}} = W_{k0} - W,$$
$$\frac{p_{\text{ат}}^2}{2m_{\text{ат}}} = \frac{p_0^2}{2m_n} - \frac{p^2}{2m_n},$$
$$p_{\text{ат}}^2 = \frac{m_{\text{ат}}}{2m_n}\left(p_0^2 - p^2\right).$$

Подставляя это выражение в равенство (1.3), получим

$$\frac{m_{\text{ат}}}{2m_n}\left(p_0^2 - p^2\right) = p_0^2 + p^2 - 2p_0 p\cos\theta,$$
$$\left(1 + \frac{m_{\text{ат}}}{m_n}\right)p^2 - 2p_0 p\cos\theta + \left(1 - \frac{m_{\text{ат}}}{m_n}\right)p_0^2 = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$p = p_0\frac{\cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta + \left(\dfrac{m_{\text{ат}}}{m_n} - 1\right)}}{1 + \dfrac{m_{\text{ат}}}{m_n}}.$$

Масса протона меньше массы любого атома, поэтому физический смысл имеет только решение со знаком плюс, поскольку речь идет о модуле импульса нейтрона.

Задача 1.52. Частица массы *m* испытала столкновение с покоившимся атомом массы *M*, в результате которого она отклонилась на угол 90^0 относительно первоначального направления своего движения. Как изменилась (в процентах) кинетическая энергия системы, если *M*/*м* = 5?

Решение. Сформулированный вопрос можно представить в виде

$$\eta = \frac{W_{k0} - W_k}{W_{k0}} = 1 - \frac{W_k}{W_{k0}},$$

где W_{k0} — кинетическая энергия налетающей частицы, $W_k = W_{k1} + W_{k2}$ — энергия системы после столкновения.

Из закона сохранения импульса следует, что

$$\mathbf{p}_{01} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2.$$

Из векторной диаграммы, изображенной на рис. 1.22, видно, что

$$p_1 = p_{01} \tan\theta, \qquad p_2 = \frac{p_{01}}{\cos\theta}.$$

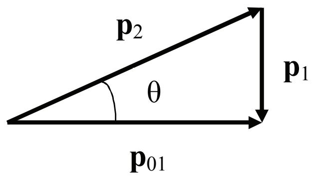

Рис. 1.22

Учитывая, что

$$W_{k0} = \frac{p_{01}^2}{2m}, \qquad W_k = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2M},$$

получим ответ

$$\eta = \tan^2\theta + \frac{m}{M\cos^2\theta} - 1 = -40\,\%.$$

Задача 1.53. На гладкой поверхности находятся три одинаковых диска (рис. 1.23). Диск *1*, двигаясь со скоростью $\mathbf{v}_0$, сталкивается одновременно с дисками *2* и *3*, расстояние между центрами которых составляет ηd (d — диаметр диска). Найти скорость v_1 первого диска после столкновения.

Решение. По закону сохранения импульса

$$\mathbf{p}_{01} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3,$$

или в проекциях на ось x

$$p_{01} = p_1 + 2p_2 \cos\alpha,$$

$$p_{01} - p_1 = 2p_2 \cos\alpha. \tag{1.4}$$

Поскольку удар упругий, выполняется закон сохранения энергии

$$W_{k0} = W_{k1} + 2W_{k2},$$

или

$$\frac{p_{01}^2}{2m} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m},$$

$$(p_{01} - p_1)(p_{01} + p_1) = 2p_2^2. \tag{1.5}$$

Разделим равенство (1.5) на равенство (1.4):

$$p_{01} + p_1 = \frac{p_2}{\cos\alpha},$$

или

$$p_2 = (p_{01} + p_1)\cos\alpha.$$

Подставим это выражение в уравнение (1.4)

$$p_{01} - p_1 = 2(p_{01} + p_1)\cos^2\alpha,$$

и после преобразований получим

$$p_1 = p_{01}\frac{1 - 2\cos^2\alpha}{1 + 2\cos^2\alpha}.$$

Из рис. 1.23 видно, что

$$\sin\alpha = \frac{\eta d / 2}{d} = \frac{\eta}{2}, \qquad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{\eta^2}{4},$$

поэтому

$$p_1 = -p_{01}\frac{2-\eta^2}{6-\eta^2},$$

$$v_1 = -v_0\frac{2-\eta^2}{6-\eta^2}.$$

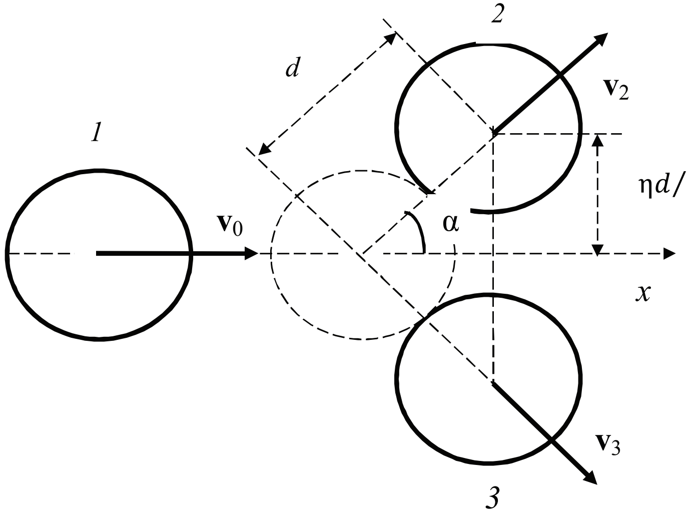

Рис. 1.23

Из полученного выражения следует, что если $\eta \prec \sqrt{2}$, то первый диск в результате столкновения изменит направление своего движения на противоположное. При условии $\eta = \sqrt{2}$ он остановится. И, наконец, при выполнении неравенства $\sqrt{2} \prec \eta \prec 2$ он продолжит движение в том же направлении. Появление дополнительного условия $\eta \prec 2$ понятно — если $\eta \succ 2$, то первый диск просто пролетит между дисками *2* и *3*.

1.6. Закон сохранения момента импульса

Задача 1.54. Момент импульса **L** тела относительно системы отсчета с центром в точке *O* меняется со временем по закону $\mathbf{L} = \mathbf{a} + \mathbf{b}t^2$, где **a** и **b** — взаимно перпендикулярные вектора. Чему будет равен момент **M** силы, действующей на тело в момент времени, когда угол между векторами **L** и **M** станет равным 45^0?

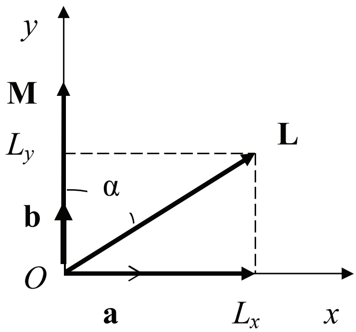

Рис. 1.24

Решение. Направим оси *x* и *y* системы координат по направлениям векторов **a** и **b** (рис. 1.24). Воспользуемся уравнением движения для момента импульса

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 2\mathbf{b}t.$$

Как видно из рис. 1.24, угол α между векторами **L** и **M** будет равным 45^0 при условии $L_y = L_x$:

$$L_x = a, \quad L_y = 2bt,$$

$$t = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \mathbf{M} = 2\mathbf{b}\sqrt{\frac{a}{b}},$$

или по модулю

$$M = 2\sqrt{ab}.$$

Задача 1.55. Шарик массы m вращается по окружности на нити длиной l, прикрепленной к опоре в точке O (рис. 1.25). Чему равно изменение его момента импульса относительно этой точки за время, равное половине периода вращения шарика, если его угловая скорость ω? Найти положение точки, относительно которой его момент импульса не меняется.

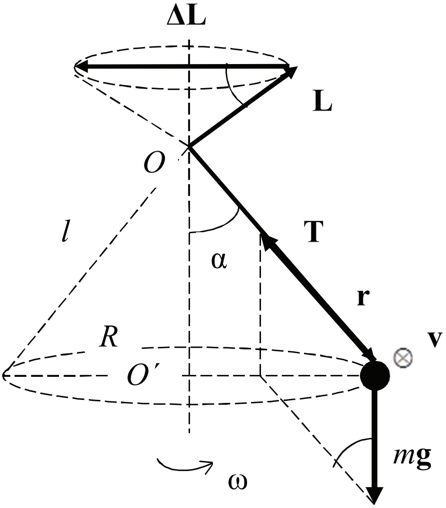

Рис. 1.25

Решение. В момент времени, когда скорость шарика направлена перпендикулярно плоскости чертежа, вектор момента импульса **L** лежит в этой плоскости (см. рис. 1.25). Модуль этого вектора относительно точки O

$$L = mvl = m\omega Rl = m\omega l^2 \sin\alpha.$$

При вращении шарика конец этого вектора также описывает окружность, и модуль его приращения ΔL за половину периода

$$\Delta L = 2L\cos\alpha = m\omega l^2 \sin 2\alpha. \qquad (1.6)$$

Для того чтобы найти угол, который образует нить с вертикалью при вращении шарика, учтем, что центростремительную силу, под действием которой происходит это вращение, можно найти из соотношения

$$m\omega^2 R = mg\tan\alpha,$$

$$\omega^2 l\sin\alpha = g\tan\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l}, \qquad \sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{g}{\omega^2 l}\right)^2},$$

и тогда

$$\Delta L = 2m\omega l^2 \sin\alpha\cos\alpha = \frac{2mgl}{\omega}\sqrt{1-\left(\frac{g}{\omega^2 l}\right)^2}.$$

Для ответа на второй вопрос обратимся к равенству (1.6): $\Delta L = 0$, если $\sin 2\alpha = 0$, то есть $\alpha = \pi/2$. Этому углу соответствует точка O'.

Задача 1.56. На гладкой горизонтальной плоскости движется прикрепленное к нити тело массы *m* (рис. 1.26). Второй конец нити продернут сквозь отверстие *O*, через которое нить втягивают с постоянной скоростью, прилагая силу $\mathbf{F}$. Найти зависимость модуля этой силы от расстояния r, если при $r = r_0$ угловая скорость движения тела $\omega = \omega_0$.

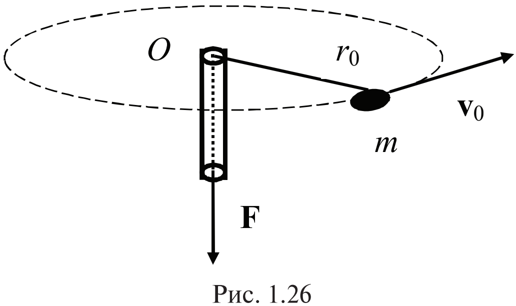

Рис. 1.26

Решение. Действующая на тело сила натяжения $\mathbf{F}$ — центральная, а это означает, что при движении тела сохраняется его момент импульса $\mathbf{L}$:

$$L = L_0,$$
$$L = mvr\sin 90^0 = m\omega r^2, \qquad L_0 = m\omega_0 r_0^2,$$
$$\omega = \omega_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2.$$

Сила **F** играет роль центростремительной силы, модуль которой равен

$$F = m\omega^2 r = m\omega_0^2 \frac{r_0^4}{r^3}.$$

Задача 1.57. Потенциальная энергия частицы в центральном поле зависит от ее расстояния r до силового центра по закону $W_p = kr^2$, где k — положительная постоянная. Движение частицы происходит по замкнутой траектории, при этом минимальное расстояние между частицей и силовым центром равно r_1, а ее скорость на максимальном удалении от силового центра v_2. Чему равна масса частицы?

Решение. Для частицы в центральном поле выполняется закон сохранения момента импульса

$$\begin{aligned} &L_1 = L_2, \\ &m_1 v_1 r_1 = m_2 v_2 r_2 \end{aligned} \qquad (1.7)$$

и закон сохранения механической энергии

$$\begin{aligned} &W_{k1} + W_{p1} = W_{k2} + W_{p2}, \\ &\frac{mv_1^2}{2} + kr_1^2 = \frac{mv_2^2}{2} + kr_2^2. \end{aligned} \qquad (1.8)$$

Выразим из равенства (1.7) v_1:

$$v_1 = \frac{mv_2}{r_2},$$

и подставим в уравнение (1.8):

$$\frac{m}{2}\left(\frac{v_2 r_2}{r_1}\right)^2 + kr_1^2 = \frac{m}{2}v_2^2 + kr_2^2,$$

$$mv_2^2\left(\frac{r_2^2}{r_1^2} - 1\right) = 2k\left(r_2^2 - r_1^2\right),$$

$$m = \frac{2kr_1^2}{v_2^2}.$$

Задача 1.58. Одна из планет *A* Солнечной системы вращается вокруг Солнца по эллиптической орбите так, что на расстоянии r_0 от Солнца ее скорость $\mathbf{v}_0$ образует с вектором $\mathbf{r}_0$ угол φ (рис. 1.27). Чему равно максимальное и минимальное расстояние между Солнцем и планетой?

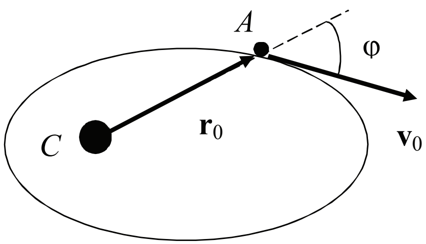

Рис. 1.27

Решение. В центральном поле момент импульса планеты остается неизменным, поэтому

$$mr_0 v_0 \sin\varphi = mr_m v \sin 90^0, \tag{1.9}$$

где m — масса планеты, r_m — максимальное (либо минимальное) расстояние между Солнцем и планетой. При этом $\mathbf{r}_m \perp \mathbf{v}$.

Механическая энергия планеты также не меняется:

$$\frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r_m} = \frac{mv_0^2}{2} - G\frac{mM}{r_0}, \tag{1.10}$$

где M — масса Солнца, G — гравитационная постоянная.

Из равенства (1.9) следует, что

$$v = \frac{r_0 v_0 \sin\varphi}{r_m},$$

и тогда уравнение (1.10) можно привести к виду

$$\left(\frac{2GM}{r_0} - v_0^2\right) r_m^2 - 2GMr_m + r_0^2 v_0^2 \sin^2\varphi = 0.$$

Введем параметр $\alpha = r_0 v_0^2 / GM$ и тогда это квадратное уравнение примет вид

$$(2-\alpha) r_m^2 - 2r_0 r_m + \alpha r_0^2 \sin^2\varphi = 0.$$

Оно имеет два корня

$$r_m = \frac{r_0}{2-\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1 - \alpha(2-\alpha)\sin^2\varphi}\right),$$

один из которых (со знаком плюс) дает максимальное, а второй — минимальное расстояние от Солнца до планеты.

В заключение отметим, что введенный нами параметр α выбран неслучайно. Движение планеты в поле тяготения Солнца является *финитным*, то есть происходит в ограниченной области пространства — там, где ее кинетическая энергия меньше модуля потенциальной энергии планеты. В противном случае она покинет пределы Солнечной системы:

$$\frac{mv^2}{2} \prec \frac{GmM}{r}, \qquad \frac{rv^2}{GM} \prec 2, \qquad \alpha \prec 2.$$

Задача 1.59. На горизонтальной плоскости закреплен цилиндр, ось C которого направлена вертикально. К его поверх-

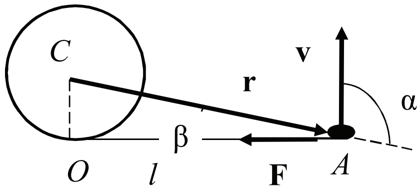

Рис. 1.28

ности в точке O прикреплена нить, на другом конце которой находится небольшой диск A массой m = 50 г, которому сообщили скорость $v = 5{,}0$ м/с (рис. 1.28). Чему равен момент импульса диска относительно точки C после разрыва нити, который наступает при значении силы натяжения F_m = 26 Н. Трение отсутствует.

Решение. Сила натяжения, действующая на диск, направлена к точке O и не является центральной, поэтому его момент импульса относительно точки C будет изменяться в процессе движения:

$$L = mvr\sin\alpha = mvr\cos\beta = mvl.$$

С другой стороны, работа этой силы равна нулю, поскольку в любой момент сила натяжения перпендикулярна скорости диска, а это значит, что модуль скорости диска не меняется. При этом сила натяжения нити равна $F = mv^2/l$, и в момент разрыва

$$l = \frac{mv^2}{F_m}.$$

Поэтому

$$L = \frac{m^2v^3}{F_m} = 1{,}2\cdot 10^{-2}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}.$$

Отметим, что после разрыва нити диск движется свободно, и его момент импульса остается неизменным.

Задача 1.60. Частица массы m, двигаясь со скоростью v, упруго отражается от неподвижной стенки под углом α к нормали (рис. 1.29). Найти:

а) точки, относительно которых момент импульса частицы не изменяется в результате столкновения со стенкой;

б) изменение момента импульса частицы относительно точки O', находящейся на расстоянии l от точки O.

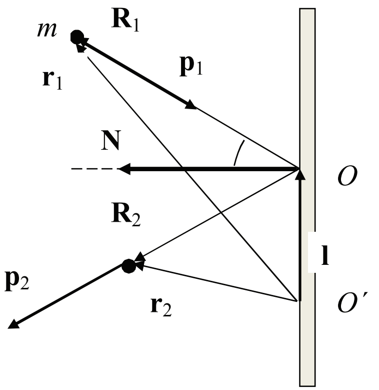

Рис. 1.29

Решение. Свободное движение частицы нарушается лишь в момент удара о стенку, когда на нее действует сила реакции опоры $\mathbf{N}$. Момент этой силы равен нулю относительно точек, лежащих на нормали к стенке, проведенной в точке столкновения O. Таким образом, момент импульса частицы относительно любой из этих точек не будет меняться при ударе о стенку.

Положение частицы относительно точки O до и после столкновения определим векторами $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$, и импульсами — $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$. Моменты импульса будут равны соответственно

$$\mathbf{L}_1 = [\mathbf{R}_1, \mathbf{p}_1], \quad \mathbf{L}_2 = [\mathbf{R}_2, \mathbf{p}_2].$$

Поскольку момент импульса относительно точки O остается неизменным, то

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2, \quad [\mathbf{R}_1, \mathbf{p}_1] = [\mathbf{R}_2, \mathbf{p}_2].$$

Положение точки O относительно точки O' определяется вектором $\mathbf{l}$ (рис. 1.29), и поэтому положение частицы относительно точки O' до и после столкновения будет определяться векторами

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{l} + \mathbf{R}_1, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{l} + \mathbf{R}_2.$$

Значение импульсов частиц при этом не изменится.

Изменение момента импульса частицы относительно точки O'

$$\Delta\mathbf{L}' = \mathbf{L}_2' - \mathbf{L}_1' = [\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2] - [\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1] = [\mathbf{l}, \Delta\mathbf{p}],$$

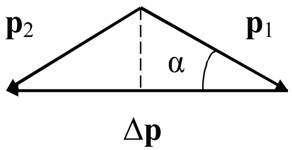

Рис. 1.30

где $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$, причем согласно второму закону Ньютона направление этого вектора совпадает с направлением вектора **N**.

Как следует из рис. 1.30,

$$\Delta p = 2 p_1 \sin\alpha = 2mv\sin\alpha.$$

Таким образом,

$$\Delta L' = l\Delta p \sin 90^0 = 2mvl\sin\alpha.$$

Задача 1.61. Небольшое тело привязано к нити длиной l, другой конец нити прикреплен к точке подвеса O. Тело отклонили на угол θ от вертикали и сообщили ему скорость v_0 (рис. 1.31). При этом угол, образованный нитью с вертикалью в наивысшей точке траектории A, равен 90^0. Чему равна скорость v_0?

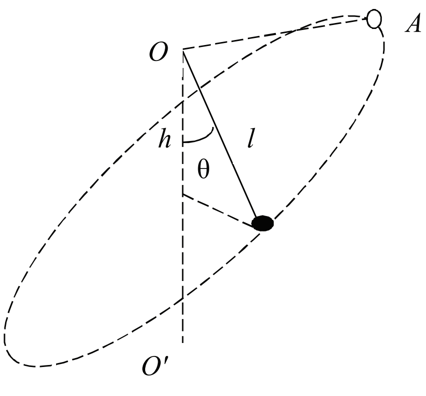

Рис. 1.31

Решение. Движение тела происходит под действием силы тяжести и силы натяжения нити, равнодействующая которых перпендикулярна оси OO'. Это означает, что проекция момента импульса на эту ось не меняется, поэтому

$$mv_0 l\sin\theta = mvl,$$
$$v = v_0\sin\theta,$$

где v — скорость тела в точке A.

Исходя из закона сохранения механической энергии, получим

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh, \qquad h = l\cos\alpha,$$

и тогда

$$v_0^2 = \frac{2gl\cos\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{2gl}{\cos\theta},$$
$$v_0 = \sqrt{\frac{2gl}{\cos\theta}}.$$

Задача 1.62. Частица массой m_1, обладающая кинетической энергией W_{k0}, налетает на покоящуюся частицу массой m_2, имея прицельный параметр l (рис. 1.32). На какое минимальное расстояние сблизятся эти частицы, если они имеют одинаковые заряды q?

Решение. Эту задачу удобно рассмотреть в C-системе отсчета, связанной с центром масс этих частиц. Первоначально в C-системе обе частицы двигаются навстречу друг другу с равными по величине импульсами $\mathbf{p}_{01}' = -\mathbf{p}_{02}'$ (рис. 1.33). Их суммарный момент импульса

$$\mathbf{L}_0' = \mathbf{L}_1' + \mathbf{L}_2' = \left[\mathbf{r}_1', \mathbf{p}_1'\right] + \left[\mathbf{r}_2', \mathbf{p}_2'\right] =$$
$$= \left[\mathbf{r}_1', \mathbf{p}_1'\right] - \left[\mathbf{r}_2', \mathbf{p}_1'\right] = \left[\left(\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2\right)', \mathbf{p}_1'\right] = \left[\mathbf{r}_{12}', \mathbf{p}_1'\right].$$

В скалярном виде

$$L_0' = r_{12}' p_{01}' \sin\alpha = l p_{01},$$

где α — угол между векторами $\mathbf{r}_{12}'$ и $\mathbf{p}_{01}'$.

В момент максимального сближения вектора $\mathbf{r}_{12}'$ и $\mathbf{p}_1'$ взаимно перпендикулярны, поэтому $L' = r_{\min} p_1'$. Полагая, что эти частицы представляют собой изолированную систему, применим закон сохранения момента импульса:

$$l p_{01}' = r_{\min} p_1', \qquad p_1' = \frac{l p_{01}'}{r_{\min}}. \tag{1.11}$$

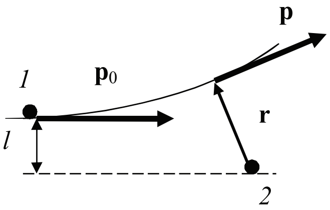

Рис. 1.32

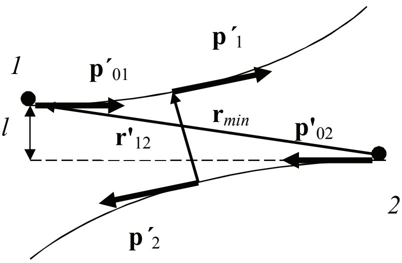

Рис. 1.33

Применим закон сохранения энергии:

$$W_{k0}' = W_k' + W_p, \tag{1.12}$$

в котором W_{k0}' — суммарная кинетическая энергия частиц в начальный момент в C-системе, W_k' — суммарная кинетическая энергия, $W_p = kq^2/r_{\min}$ — энергия кулоновского отталкивания частиц при их максимальном сближении:

$$W_{k0}' = \frac{p_{01}^2}{2m_1} + \frac{p_{02}^2}{2m_2} = \frac{p_{01}^2(m_1 + m_2)}{2m_1 m_2} = \frac{p_{01}^2}{2\mu}.$$

Здесь мы ввели величину

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

которую называют *приведенной массой* системы.

Таким же образом найдем

$$W_k{}' = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_{01}^2 \left(m_1 + m_2\right)}{2m_1 m_2} = \frac{p_1^2}{2\mu} =$$

$$= \frac{1}{2\mu}\left(\frac{l p_{01}{}'}{r_{\min}}\right)^2 = \frac{l^2}{r_{\min}^2} W_{k0}{}'.$$

Теперь уравнение (1.12) можно привести к виду

$$r_{\min}^2 - \frac{kq^2}{W_{k0}{}'} r_{\min} - l^2 = 0$$

и решить его

$$r_{\min} = \frac{kq^2}{2W_{k0}{}'}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2lW_{k0}{}'}{kq^2}\right)^2}\right).$$

Нам осталось найти первоначальную кинетическую энергию $W_{k0}{}'$ частиц в системе центра масс. Для этого воспользуемся известной формулой

$$W_{k0}{}' = \frac{\mu v_{\text{отн}}^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2\left(m_1 + m_2\right)}\left(\mathbf{v}_{01} - \mathbf{v}_{02}\right)^2 =$$

$$= \frac{m_1 m_2 v_0^2}{2\left(m_1 + m_2\right)} = W_{k0}\,\frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Здесь мы учли, что в лабораторной системе отсчета вторая частица первоначально покоилась.

1.7. Динамика твердого тела

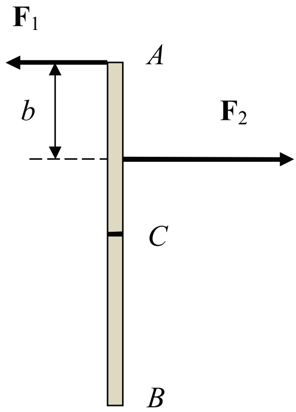

Рис. 1.34

Задача 1.63. На стержень AB массы m = 1,0 кг действуют силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ (F_2 = 5,0 Н), под действием которых он движется поступательно (рис. 1.34). Расстояние между точками приложения этих сил b = 20 см. Найти длину стержня, если ускорение его движения a = 2,0 м/с^2.

Решение. Поступательному движению стержня соответствует выполнение условия равенства нулю алгебраической суммы моментов приложенных к нему сил относительно центра масс C-стержня:

$$\frac{l}{2}F_1 - \left(\frac{l}{2} - b\right)F_2 = 0.$$

С другой стороны, по второму закону Ньютона

$$ma = F_2 - F_1.$$

Решая совместно эти уравнения, получим ответ

$$l = \frac{2bF_2}{ma} = 1{,}0 \text{ м.}$$

Задача 1.64. Ось вращения O прямоугольной пластины массы m со сторонами l и b перпендикулярна к плоскости пластины и проходит через одну из ее вершин (рис. 1.35). Найти момент инерции пластины относительно этой оси.

Решение. Разобьем пластину на тонкие полоски, имеющие ширину dx и массу dm. Ее момент инерции dI_z^0 относительно точки C известен: $dI_z^0 = dml^2/12$, а массу полоски легко найти из соотношения

$$\frac{dm}{m} = \frac{dx}{b}, \qquad dm = \frac{mdx}{b}.$$

Таким образом,

$$dI_z^0 = \frac{mdx}{12b}l^2.$$

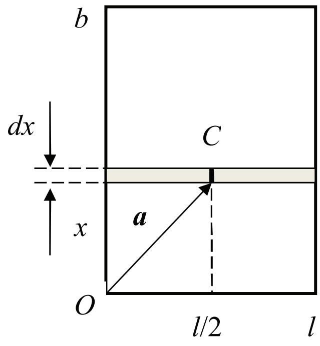

Рис. 1.35

Момент инерции этой полоски относительно оси O найдем, используя теорему Штейнера:

$$dI_z = dI_z^0 + dma^2, \qquad a^2 = \frac{l^2}{4} + x^2,$$

$$dI_z = \frac{m}{b}\left(\frac{l^2}{3} + x^2\right)dx.$$

Момент инерции пластины относительно оси, проходящей через точку O, найдем, проинтегрировав это выражение,

$$I_z = \int_0^b \frac{m}{b}\left(\frac{l^2}{3} + x^2\right)dx = \frac{m}{3}\left(l^2 + b^2\right).$$

Задача 1.65. В диске радиуса R с центром в точке O вырезали круглое отверстие так, как это показано на рис. 1.36. Вычислить момент инерции этого тела относительно оси, проходящей через точку O и перпендикулярной диску, если его масса m.

Решение. Момент инерции сплошного диска массы M (до выреза) относительно точки O

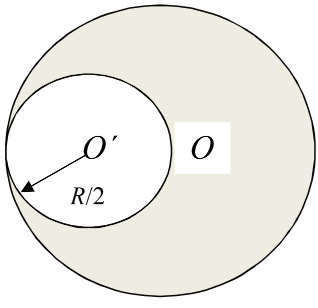

Рис. 1.36

$$I_z^0 = MR^2 = (m + m')R^2,$$

где m' — масса вырезанной части диска. Масса тела

$$m = M - m' = \rho h\left(\pi R^2 - \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\rho h\pi R^2 = \frac{3}{4}M, \quad m' = \frac{1}{3}m,$$

поэтому

$$I_z^0 = \frac{2}{3}mR^2.$$

Момент инерции I_z' удаленной части диска относительно точки O вычислим, используя теорему Штейнера

$$I_z' = \frac{1}{2}m'\left(\frac{R}{2}\right)^2 = +m'\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}m'R^2 = \frac{1}{8}mR^2.$$

Таким образом, момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку O

$$I_z = I_z^0 - I' = \frac{13}{24}mR^2.$$

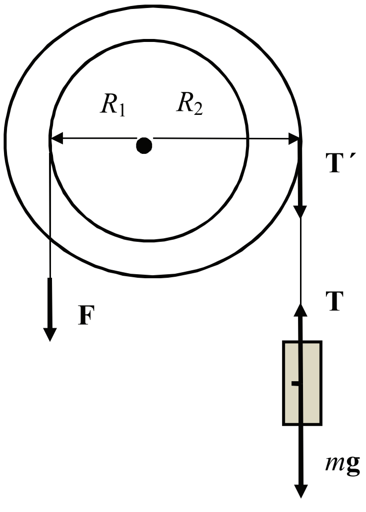

Рис. 1.37

Задача 1.66. Два цилиндра радиусами R_1 и R_2, имеющие общую ось вращения, образуют ступенчатый блок (рис. 1.37). На цилиндры в противоположных направлениях намотаны нити. Слева к одной нити приложена сила **F**, а справа к другой подвешен груз массы m. Момент инерции блока относительно оси вращения равен I. Найти угловое ускорение блока.

Решение. Будем считать для определенности, что вращение блока происходит по часовой стрелке. Тогда уравнение динамики вращательного движения блока можно записать в виде

$$I\varepsilon = -FR_1 + T'R_2,$$
$$T' = T,$$

а по второму закону Ньютона

$$ma = mg - T, \quad a = \varepsilon R_2,$$
$$T = mg - m\varepsilon R_2.$$

Таким образом,

$$I\varepsilon = -FR_1 + \left(mg - m\varepsilon R_2\right)R_2,$$
$$\varepsilon = \frac{mgR_2 - FR_1}{I + mR_2^2}.$$

Задача 1.67. На диск массы M и радиуса R, имеющий горизонтальную ось вращения, намотана цепочка массой m и длиной l (рис. 1.38). Найти зависимость углового ускорения диска от длины x свешивающегося конца цепочки.

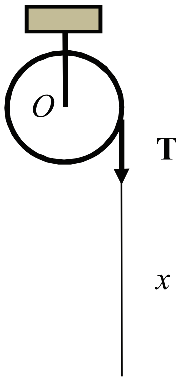

Рис. 1.38

Решение. Запишем уравнение динамики вращательного движения диска:

$$I_z\varepsilon = M_z,$$
$$I_z = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}\left(m - m'\right)R^2,$$

где m' — масса свешивающегося конца цепочки, равная

$$m' = \frac{m}{l}x.$$

Момент силы натяжения T цепочки, действующей на диск,

$$M_z = TR = m'\left(g - a\right) = m'\left(g - \varepsilon R\right).$$

Таким образом,

$$(m-m')R\varepsilon = m'(g-\varepsilon R),$$

$$\varepsilon = \frac{2mgx}{lR(M+2m)}.$$

Задача 1.68. Диск радиуса *R*, вращающийся с угловой скоростью ω_0, поместили в угол (рис. 1.39). Сколько оборотов n сделает диск до остановки, если коэффициент трения между диском и стенками равен μ?

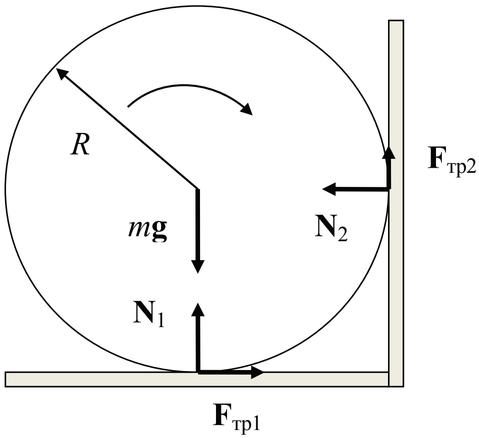

Рис. 1.39

Решение. Разберемся с силами, действующими на диск. Со стороны нижней стенки на него действует сила реакции опоры $\mathbf{N}_1$, что приводит к возникновению силы трения $\mathbf{F}_{тр1}$. Эта сила прижимает диск ко второй стенке, и это приводит к появлению еще одной силы реакции опоры $\mathbf{N}_2$, которая вызывает появление еще одной силы трения $\mathbf{F}_{тр2}$. Центр масс диска покоится, а это означает, что

$$mg = N_1 + F_{\text{тр}2},$$
$$F_{\text{тр}1} = N_2.$$

Поскольку

$$F_{\text{тр}1} = \mu N_1, \quad F_{\text{тр}2} = \mu N_2,$$

эти равенства можно записать в виде

$$mg = N_1 + \mu N_2,$$
$$\mu N_1 = N_2.$$

Решая эту систему, получим

$$N_1 = \frac{mg}{1+\mu^2}, \quad N_2 = \frac{\mu mg}{1+\mu^2}.$$

На диск действует тормозящий момент сил трения

$$M_{\text{тр}} = -\left(F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}2}\right)R = -\frac{\mu mg\left(1+\mu\right)}{1+\mu^2}R,$$

работа которых изменяет кинетическую энергию диска:

$$dW_k = M_{\text{тр}}d\varphi, \quad \Delta W_k = M_{\text{тр}}\Delta\varphi,$$

$$n = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta W_k}{2\pi M_{\text{тр}}} = \frac{0 - W_{k0}}{2\pi\left(-\frac{\mu mg\left(1+\mu\right)}{1+\mu^2}R\right)} =$$

$$= \frac{\left(1+\mu^2\right)}{2\pi R\mu mg\left(1+\mu\right)}W_{k0}.$$

Учитывая, что

$$W_{k0} = \frac{I\omega_0^2}{2}, \quad I = \frac{1}{2}mR^2,$$

получим ответ

$$n = \frac{\omega_0^2 R\left(1+\mu^2\right)}{8\pi\mu g\left(1+\mu\right)}.$$

Задача 1.69. Вращающийся с угловой скоростью ω_0 диск массы m и радиуса R положили на горизонтальную поверхность. Найти время τ, за которое произойдет остановка диска, и работу, совершенную при этом силами трения. Коэффициент трения μ.

Решение. Представим диск в виде множества тонких колец, и выберем одно, имеющее радиус r и толщину dr (рис. 1.40). Масса этого кольца

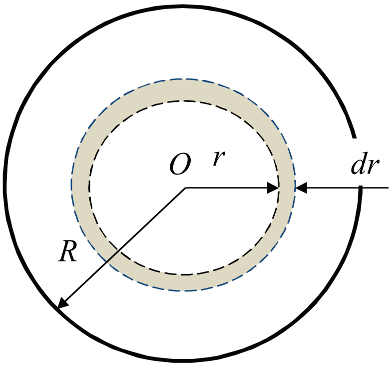

Рис. 1.40

$$dm = \rho ds = \rho 2\pi r dr,$$

где ρ — поверхностная плотность материала кольца, равная массе, приходящейся на единицу его площади $\rho = m/\pi r^2$.

На это кольцо будет действовать сила трения

$$dF_{\text{тр}} = \mu dmg = \mu g \rho 2\pi r dr.$$

Ее момент относительно точки O равен

$$dM_{\text{тр}} = dF_{\text{тр}} r = \mu g \rho 2\pi r^2 dr.$$

Модуль момента сил трения, действующего на диск в целом

$$M_{\text{тр}} = \int_0^R \mu g \rho 2\pi r^2 dr = \frac{2}{3}\mu g \rho \pi r^3 = \frac{2}{3}\mu m g R.$$

Согласно уравнению вращательного движения

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z,$$

$$d\omega = \frac{M_z}{I_z} dt,$$

$$\int_{\omega_0}^{0} d\omega = \int_0^{\tau} \frac{M_z}{I_z} dt,$$

$$-\omega_0 = \frac{M_z}{I_z}\tau.$$

Учтем, что $M_z = -M_{\text{тр}}$, $I = mR^2/2$, и получим ответ на первый вопрос задачи:

$$\tau = \frac{3\omega_0 R}{4\mu g}.$$

Согласно теореме о кинетической энергии работа сил трения

$$A_{\text{тр}} = \Delta W_k = 0 - W_{k0} = -\frac{I_z\omega_0^2}{2} = -\frac{1}{4}mR^2\omega_0^2.$$

Знак минус говорит о том, что работа сил трения отрицательна.

Задача 1.70. Диск радиуса R раскрутили до угловой скорости ω_0 и опустили на такой же диск, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности. Через какое время τ оба диска будут вращаться как единое целое? Коэффициент трения между ними μ.

Решение. Пусть момент инерции каждого диска I. Тогда по закону сохранения момента импульса

$$I\omega_0 = 2I\omega, \quad \omega = \frac{1}{2}\omega_0,$$

где ω — установившаяся угловая скорость дисков.

Увеличение угловой скорости вращения второго диска связано с действием на него сил трения, момент которых относительно оси вращения $M_{\text{тр}}$ мы вычислили в задаче 1.69:

$$M_{\text{тр}} = \frac{2}{3}\mu mgR.$$

Воспользуемся уравнением динамики вращательного движения

$$d\omega = \frac{M_{тр}}{I} dt,$$

$$\int_0^{\omega} d\omega = \int_0^{\tau} \frac{M_{тр}}{I} dt,$$

$$\omega = \frac{M_{тр}}{I} \tau,$$

$$\tau = \frac{I\omega_0}{2M_{тр}}.$$

Таким образом,

$$\tau = \frac{3\omega_0 R}{8\mu g}.$$

Задача 1.71. Двум дискам, имеющим равные радиусы, но разные моменты инерции I_1 и I_2 относительно своих осей вращения, сообщили одинаковую угловую скорость ω_0 (рис. 1.41). После приведения их в соприкосновение система с течением времени перешла в состояние, в котором оба диска стали вращаться в противоположных направлениях с одной и той же угловой скоростью. Найти:

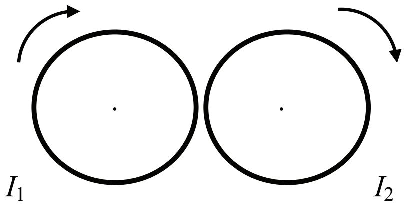

Рис. 1.41

а) изменение момента импульса ΔL этой системы;

б) изменение ΔW_k ее механической энергии.

Решение. Сделаем несколько предварительных замечаний. Предположим, что моменты инерции этих дисков одинаковы. Понятно, что в этом случае по прошествии некоторого времени диски остановятся. Нет ли здесь противоречия с законом сохранения момента импульса, ведь первоначально суммарный момент импульса дисков отличен от нуля и равен $L_0 = L_{01} + L_{02} = I_1\omega_0 + I_2\omega_0$? Противоречий нет, поскольку эта система не замкнута — должны быть внешние силы, прижимающие диски друг к другу.

Будем считать для определенности, что $I_1 \succ I_2$. Тогда по прошествии времени первый диск продолжит вращаться по часовой стрелке с установившейся скоростью ω, и ее изменение будет по модулю равно $|\Delta\omega_1| = \omega_0 - \omega$. Напротив, направление вращения второго диска (как и направление вектора его угловой скорости) изменится на противоположное, при этом его угловая скорость претерпит изменение, модуль которого $|\Delta\omega_2| = \omega_0 + \omega$. Действующие на эти диски силы трения равны по величине, и, значит, будут равны по модулю моменты этих сил относительно соответствующих осей вращения: $|M_{\text{тр}1}| = |M_{\text{тр}2}|$.

Используя уравнение динамики вращательного движения,

$$\left| I_1 \frac{\Delta\omega_1}{\Delta t} \right| = \left| I_2 \frac{\Delta\omega_2}{\Delta t} \right|,$$

$$I_1(\omega_0 - \omega) = I_2(\omega_0 + \omega),$$

$$\omega = \omega_0 \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}.$$

Таким образом, изменение момента импульса ΔL этой системы

$$\Delta L = L - L_0,$$

$$L_0 = I_1\omega_0 + I_2\omega_0,$$

$$L = I_1\omega - I_2\omega.$$

Знак минус в последнем равенстве связан с тем, что при соприкосновении дисков произошло изменение направления вектора угловой скорости второго диска.

Теперь мы можем получить ответ на первый вопрос задачи:

$$\Delta L = -\omega_0 \frac{4I_1 I_2}{I_1 + I_2}.$$

Изменение ΔW_k механической энергии дисков находится легко:

$$\Delta W_k = W_k - W_{k0} = \frac{(I_1 + I_2)\omega}{2} - \frac{(I_1 + I_2)\omega_0^2}{2} =$$

$$= \frac{2I_1 I_2 \omega_0^2}{I_1 + I_2}.$$

Задача 1.72. На вершине сферы радиуса R находится шар радиуса r, который начинает без скольжения скатываться с нее (рис. 1.42). Определить угловую скорость вращения шара после его отрыва от сферы.

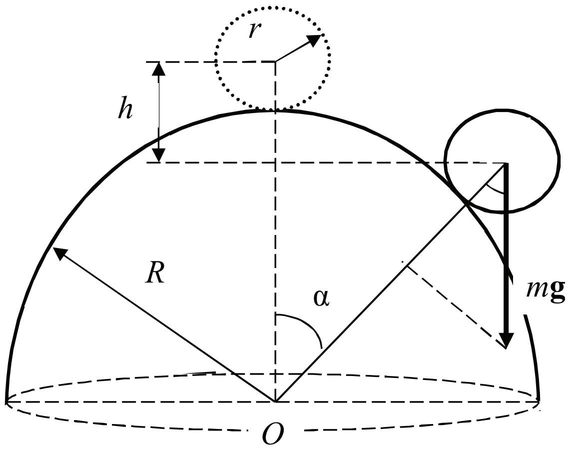

Рис. 1.42

Решение. В момент отрыва шара действующая на него сила реакции опоры обращается в нуль, и роль центростремительной силы играет лишь составляющая силы тяжести, направленная к точке O и равная

$$F_{\text{цс}} = mg\cos\alpha,$$

$$\frac{mv^2}{R+r} = mg\cos\alpha, \qquad (1.13)$$

где v — скорость шара в момент его отрыва от поверхности сферы.

Согласно закону сохранения механической энергии

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_z^0\omega^2}{2}.$$

В этом равенстве

$$h = (R+r)(1-\cos\alpha), \quad v = \omega r, \quad I_z^0 = \frac{2}{5}mr^2.$$

Тогда

$$g(R+r)(1-\cos\alpha) = \frac{7}{10}v^2,$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{7v^2}{10g(R+r)}.$$

Подставим эту формулу в уравнение (1.13), найдем

$$v = \sqrt{\frac{10g(R+r)}{17}},$$

и получим ответ

$$\omega = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{10g(R+r)}{17r^2}}.$$

Заметим, что после отрыва угловая скорость вращения остается постоянной.

Задача 1.73. Стержень *AB*, имеющий длину *l* и массу *M,* свободно вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через точку *A* (рис. 1.43). Здесь же находится муфточка массы *m*, которая начинает скольжение вдоль стержня. Какова будет ее скорость v' вблизи точки *B*, если начальная угловая скорость стержня ω_0? Трением пренебречь.

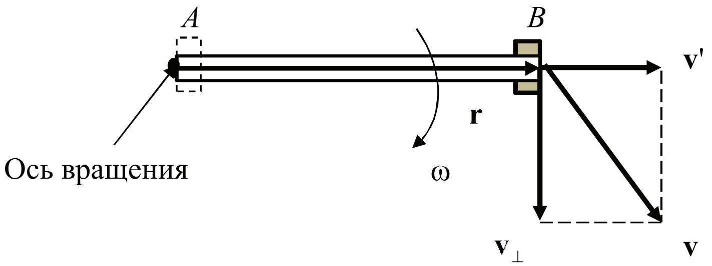

Рис. 1.43

Решение. При свободном вращении стержня его момент импульса не меняется:

$$\mathbf{L} + \mathbf{L}_м = \mathbf{L}_0,$$

$$\mathbf{L} = I\omega, \quad \mathbf{L}_0 = I\omega_0,$$

где $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}_0$ — моменты импульса стержня в начале и в конце движения муфточки, момент импульса которой $\mathbf{L}_м$ в точке B можно представить в виде

$$\mathbf{L}_м = I_м\omega = mr^2\omega.$$

Момент инерции стержня относительно точки A определим по теореме Штейнера:

$$I = I_0 + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}Ml^2 + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}Ml^2.$$

Переходя к проекциям векторов на ось вращения, получим

$$L_0 = \frac{1}{3}Ml^2\omega_0,$$

$$L = \frac{1}{3}Ml^2\omega + ml^2\omega = \frac{1}{3}\left(1+\frac{3m}{M}\right)l^2\omega,$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{1+\dfrac{3m}{M}}.$$

Воспользуемся законом сохранения энергии:

$$W_{k0} = W_k + W_{k\text{м}},$$

$$\frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}, \qquad v^2 = v_\perp^2 + v'^2 = \omega^2 l^2 + v'^2,$$

$$mv'^2 = I\omega_0^2 - \left(I + ml^2\right)\omega^2,$$

$$mv'^2 = \frac{1}{3}Ml^2\omega_0^2 - \frac{1}{3}Ml^2\left(1+\frac{3m}{M}\right)\omega^2,$$

$$mv'^2 = \frac{1}{3}Ml^2\omega_0^2 - \frac{1}{3}Ml^2\omega_0^2\frac{1}{1+\dfrac{3m}{M}},$$

$$mv'^2 = \frac{1}{3}Ml^2\omega_0^2\left(1-\frac{1}{1+\dfrac{3m}{M}}\right),$$

$$v' = \frac{\omega_0 l}{\sqrt{1+\dfrac{3m}{M}}}.$$

Задача 1.74. Пластинка массы M в виде квадрата со стороной l прикреплена к вертикальной оси O вращения одной из своих сторон (рис. 1.44). Частица массы m, летящая со скоростью v, попадает в центр пластинки по нормали к ней. Считая столкновение упругим, найти:

а) вектор скорости $\mathbf{v}'$ частицы после столкновения;

б) силу F реакции оси вращения после столкновения.

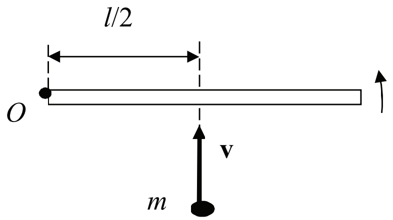

Рис. 1.44

Решение. Поскольку столкновение упругое, энергия системы остается неизменной, поэтому

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

Момент инерции пластины относительно оси O совпадает с формулой, полученной в предыдущей задаче для стержня $I = Ml^2/3$, и тогда

$$v^2 - v'^2 = \frac{M}{3m}\omega^2 l^2. \quad (1.14)$$

Момент импульса системы также не изменяется в процессе столкновения

$$L = L' + L_{\text{пл}},$$

$$mv\frac{l}{2} = -mv'\frac{l}{2} + I\omega,$$

$$\omega = \frac{3m}{2Ml}(v + v'). \quad (1.15)$$

Подставим полученную формулу в уравнение (1.14):

$$v^2 - v'^2 = \frac{3m}{4M}(v + v')^2,$$

и, проведя преобразования, получим

$$v' = v\frac{4M - 3m}{4M + 3m}. \quad (1.16)$$

В векторной записи необходимо учесть, что вектора $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ направлены противоположно, поэтому

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}\frac{4M - 3m}{4M + 3m}.$$

После удара пластина начинает вращаться вокруг оси, и роль центростремительной силы при этом играет сила реакции оси OO'. Для того, чтобы вычислить ее, представим пластину в виде множества тонких полос, имеющих ширину dr и параллельных оси вращения.

Найдем центробежную силу, действующую на одну из них, находящуюся на расстоянии r от оси (рис. 1.45)

$$dF_{\text{цс}} = dm\omega^2 r = \frac{Mdr}{l}\omega^2 r.$$

Проинтегрировав это выражение, получим

$$F = F_{\text{цс}} = \int_0^l \frac{Mdr}{l}\omega^2 r = \frac{1}{2}Ml\omega^2.$$

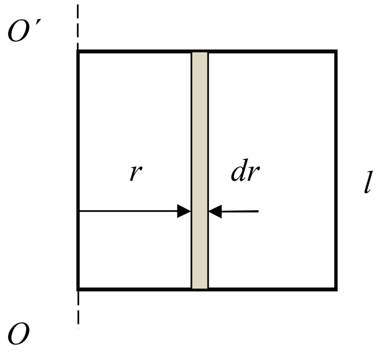

Рис. 1.45

Угловую скорость вращения пластины после удара мы знаем. Воспользуемся формулами (1.15) и (1.16), получим

$$\omega = \frac{3m}{2Ml}(v + v') = \frac{4v}{l\left(1 + \frac{4M}{3m}\right)},$$

и запишем ответ

$$F = \frac{8Mv^2}{l\left(1 + \frac{4M}{3m}\right)^2}.$$

Задача 1.75. Вертикально висящий стержень длины l и массы M может свободно качаться относительно горизонтальной оси O, проходящей через его верхний конец (рис. 1.46). Пуля массы m $(m \ll M)$, летевшая горизонтально, попадает в его нижний конец и застревает в нем. Стержень при этом отклонился от вертикали на угол α. Найти:

а) скорость пули;
б) изменение полного импульса системы «стержень-пуля» в результате столкновения;
в) место попадания пули в стержень, при котором импульс этой системы останется неизменным.

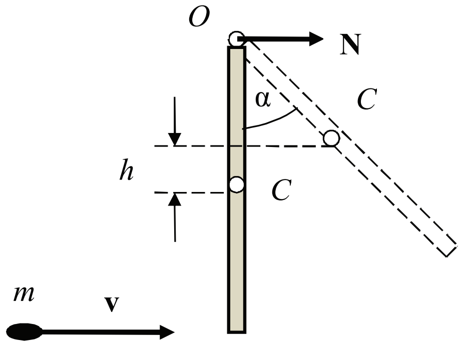

Рис. 1.46

Решение. Первоначально на стержень действуют две силы — тяжести и реакции оси вращения, направленные вертикально и уравновешивающие друг друга. В момент попадания пули возникает «сила отдачи» — горизонтальная составляющая силы реакции оси (на рисунке она изображена как **N**). Ее появление и приводит к изменению импульса системы «стержень-пуля». Линии действия всех перечисленных сил проходят через точку O, поэтому суммарный момент импульса системы относительно этой точки остается неизменным:

$$mvl = I\omega, \tag{1.17}$$

где I — момент инерции стержня с пулей относительно оси вращения

$$I = \frac{1}{3}Ml^2 + ml^2 \approx \frac{1}{3}Ml^2.$$

Воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{I\omega^2}{2} = Mgh, \qquad \omega = \sqrt{\frac{2Mgh}{I}},$$

где h — высота, на которую поднялся центр масс стержня. Она равна

$$h = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\alpha = \frac{l}{2}(1 - \cos\alpha) = l\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Найдем скорость пули:

$$v = \frac{I\omega}{ml} = \frac{I}{ml}\sqrt{\frac{2Mgh}{I}} =$$

$$= \frac{1}{ml}\sqrt{2IMgh} = \frac{M}{m}\sqrt{\frac{2}{3}gh}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

До попадания пули импульс этой системы был равен $p_0 = mv$. После столкновения ее импульс будет равен $p = Mv_C$, где v_C — скорость движения центра масс стержня, которую можно представить как $v_C = \omega l / 2$, и тогда

$$p = Mv_C = M\omega\frac{l}{2} = \frac{mMl^2v}{2I} = \frac{3}{2}mv = \frac{3}{2}p_0.$$

Таким образом, изменение полного импульса системы «стержень-пуля» в результате столкновения

$$\Delta p = p - p_0 = \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}mv = M\sqrt{\frac{1}{6}gh}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Ответим на последний вопрос задачи. Пусть пуля попадает не в конец стержня, а в точку, находящуюся на расстоянии x от оси вращения. Тогда равенство (1.17) примет вид

$$mvx = I\omega, \qquad \omega = \frac{mvx}{I},$$

и импульс системы

$$p = \frac{3x}{2l} mv = \frac{3x}{2l} p_0.$$

Согласно условию, в этом случае $p = p_0$, а это означает, что $x = 2l/3$. Это интересный результат. Если импульс системы не меняется, то сила реакции оси равна нулю — в процессе столкновения ось «не чувствует» удара пули. Этот результат легко обобщить: если $x \prec 2l/3$, то $\Delta p \prec 0$ и наоборот.

И еще один вопрос, который хотелось бы обсудить. При ударе пули импульс системы увеличился. А что можно сказать о ее кинетической энергии? Ведь мы знаем, что при неупругом столкновении она должна уменьшаться. Найдем ее изменение, не ограничиваясь условием $m \ll M$,

$$\omega = \frac{mvl}{I} = \frac{mv}{\left(m + \frac{M}{3}\right) l}, \qquad I = \frac{1}{3} Ml^2 + ml^2,$$

$$\Delta W_k = \frac{I\omega^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = -\frac{mv^2}{2\left(1 + \frac{3m}{M}\right)} \prec 0.$$

1.8. Неинерциальные системы отсчета

Задача 1.76. По гладкому полукольцу радиуса *R*, имеющему вертикальную ось вращения OO', может свободно скользить муфта *A* (рис. 1.47). После того, как полукольцо привели во вращение с угловой скоростью ω, муфта сместилась относительно оси вращения, отклонившись на угол θ от вертикали. Найти этот угол.

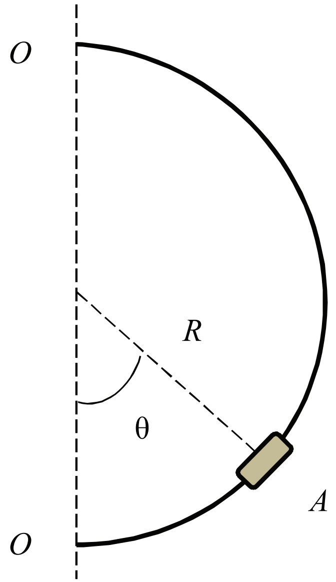

Рис. 1.47

Решение. Рассмотрим ситуацию в неинерциальной системе отсчета (НСО), вращающейся вместе с полукольцом (рис. 1.48). В этой системе отсчета на муфту, помимо силы тяжести $m\mathbf{g}$ и силы реакции опоры $\mathbf{N}$, действует центробежная сила $\mathbf{F}_{цб}$, направленная радиально от оси вращения, и их равнодействующая равна нулю — муфта находится в равновесии:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{цб} = 0.$$

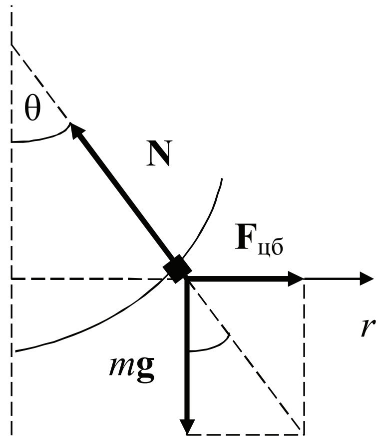

Рис. 1.48

Как следует из рисунка,

$$\frac{F_{\text{цб}}}{mg} = \tan\theta, \qquad F_{\text{цб}} = m\omega^2 r = m\omega^2 R\sin\theta,$$

и поэтому

$$\frac{\omega^2 R\sin\theta}{g} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Это уравнение имеет два решения. При $\theta = 0$ муфта находится на оси вращения и $F_{\text{цб}} = 0$. Если θ отлично от нуля, то

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R}.$$

По понятным причинам (модуль косинуса не превышает единицы) решение этого уравнения возможно лишь при $\omega \geq \sqrt{g/R}$. Таким образом, при выполнении этого условия возможны два положения равновесия: устойчивое при

$$\theta = \arccos\frac{g}{\omega^2 R}, \tag{1.18}$$

и неустойчивое при $\theta = 0$. Его неустойчивость связана с тем, что если сместить муфту из этого положения, появляется центробежная сила, и муфта перейдет в положение, определяемое углом θ из формулы (1.18).

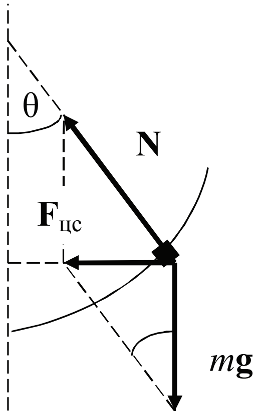

Рис. 1.49

При $\omega \prec \sqrt{g/R}$ возможно лишь одно положение устойчивого равновесия муфты при $\theta = 0$.

Эту задачу, между прочим, можно решить, не переходя в НСО. В лабораторной системе отсчета сила тяжести $m\mathbf{g}$ и силы реакции опоры $\mathbf{N}$ формируют центростремительную силу $\mathbf{F}_{\text{цс}}$ (рис. 1.49), под действием которой муфта вращается по окружности:

$$F_{цс} = m\omega^2 r = m\omega^2 R\sin\theta,$$

$$\frac{F_{цс}}{mg} = \tan\theta.$$

Дальнейший ход решения совпадает с описанным выше.

Эта задача является иллюстрацией того, что введение НСО и действующих в них сил инерции не является принципиально необходимым. По сути это вопрос удобства — некоторые задачи удобно решать, переходя в НСО.

Задача 1.77. Горизонтальная платформа вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega = 1,0\ с^{-1}$. Человек движется по платформе со скоростью v', оставаясь на расстоянии $R = 3,0$ м от оси вращения. Чему равна эта скорость, и какова сила, удерживающая человека на платформе, если в системе отсчета, связанной с платформой, сумма сил инерции, действующих на человека, равна нулю?

Решение. В неинерциальной системе отсчета K', связанной с диском, на человека действуют две силы инерции — центробежная $\mathbf{F}_{цб}$, направленная радиально от оси вращения, и сила Кориолиса $\mathbf{F}_к = 2m[\mathbf{v}', \omega]$. Ее направление противоположно направлению центробежной силы — ведь их сумма по условию должна быть равна нулю, и это позволяет определить направление вектора скорости $\mathbf{v}'$, с которой человек движется по платформе (рис. 1.50).

Итак,

$$F_к = F_{цб},$$

$$2mv'\omega = mv^2 R,$$

$$v' = \frac{1}{2}\omega R.$$

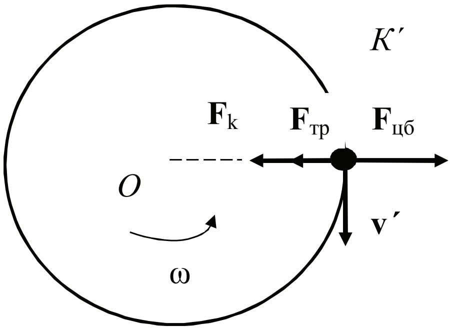

Рис. 1.50

Получился интересный результат. Точки диска, находящиеся на расстоянии R от оси O, в лабораторной системе отсчета K вращаются со скоростью $V = \omega R$ против часовой стрелки. В системе K', связанной с платформой, человек движется по окружности радиуса R по часовой стрелке со скоростью v', но в лабораторной системе его скорость будет равна $v = \omega R - v' = \omega R / 2$, и движение человека будет происходить против часовой стрелки. Таким образом, в системе K человек движется по окружности со скоростью v, а это означает, что на него действует центростремительная сила, роль которой выполняет сила трения $\mathbf{F}_{тр}$, модуль которой равен

$$F_{тр} = \frac{mv^2}{R} = \frac{1}{4} m\omega^2 R = 45\ \text{Н}.$$

Задача 1.78. Горизонтальный стержень закреплен на вертикальной оси, проходящей через один из его концов. Там же находится муфта массы $m = 0{,}50$ кг. Стержень привели во вращение с постоянной угловой скоростью $\omega = 2{,}00$ рад/с, после чего муфте сообщили скорость $v_0' = 1{,}00$ м/с. Чему будет равна сила Кориолиса, действующая на муфту, когда она окажется на расстоянии $r = 0{,}50$ м от ее первоначального положения?

Решение. В неинерциальной системе отсчета K', связанной с вращающимся стержнем, имеются две силы инерции, действующие на муфту — центробежная и сила Кориолиса (рис. 1.51). Увеличение скорости v' муфты происходит под действием центробежной силы, работа которой идет на увеличение кинетической энергии муфты в системе K':

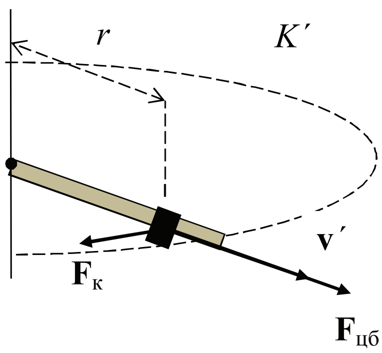

Рис. 1.51

$$W_k' - W_{k0}' = A_{цб},$$

$$\frac{mv'^2}{2} - \frac{mv_0'^2}{2} = A_{цб},$$

$$v' = \sqrt{v_0'^2 + \frac{2A_{цб}}{m}}.$$

Эту работу вычислим так:

$$A_{цб} = \int_0^r F_{цб}dr = \int_0^r m\omega^2 r dr = \frac{m\omega^2 r^2}{2}.$$

Тогда

$$v' = \sqrt{v_0'^2 + \omega^2 r^2},$$

$$F_к = 2m\omega\sqrt{v_0'^2 + \omega^2 r^2} = 2{,}8 \text{ Н}.$$

Задача 1.79. Тело находится на высоте $h = 500$ м над поверхностью Земли на нулевой широте (на экваторе). На каком расстоянии от вертикали тело упадет на Землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. При падении на тело действуют сила тяготения $\mathbf{F}_{тяг}$ и две силы инерции — центробежная $\mathbf{F}_{цб}$ и сила Кориолиса $\mathbf{F}_к$ (рис. 1.52). Первые две формируют силу тяжести, сообщающую телу ускорение свободного падения g. Учитывая, что $F_{цб} \ll F_{тяг}$, вертикальная составляющая скорости падения тела зависит от времени по закону $v_y' = gt$, а время падения определяется формулой $\tau = \sqrt{2h/g}$.

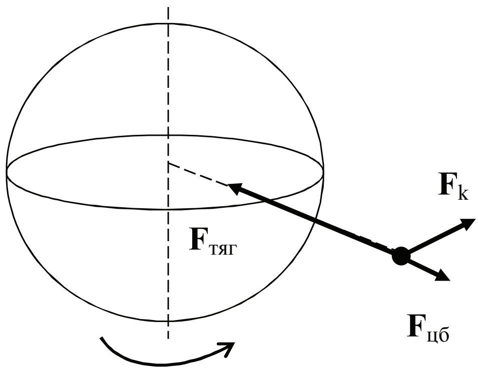

Рис. 1.52

Сила Кориолиса, действующая на тело в системе отсчета, связанной с Землей

$$F_k = 2m\omega v_y' = 2m\omega gt.$$

Эта сила сообщает телу горизонтальную составляющую a_y ускорения

$$a_x = \frac{F_k}{m} = 2\omega gt,$$

которая изменяется со временем, и сообщает телу горизонтальную составляющую v_x' скорости

$$v_x = \int_0^t a_x dt = \int_0^t 2\omega g t dt = \omega g t^2.$$

Горизонтальное смещение тела при его падении составит

$$s = \int_0^\tau v_x dt = \int_0^\tau \omega g t^2 dt = \frac{1}{3}\omega g \tau^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\omega g\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} = \frac{2}{3}\omega h\sqrt{\frac{2h}{g}} = 24 \text{ см}.$$

Задача 1.80. На гладкой горизонтальной поверхности лежит стержень массы $m = 5{,}0$ кг и длиной $l = 90$ см . По его концу произвели удар, направленный по нормали к стержню, передав ему импульс силы $J = 3{,}0$ Н·с . С какой силой одна половина стержня будет воздействовать на другую в процессе движения стержня?

Решение. После удара стержень пришел в движение. Его центр масс *C* будет двигаться поступательно с постоянной скоростью, а сам стержень будет вращаться относительно этой точки (рис. 1.53).

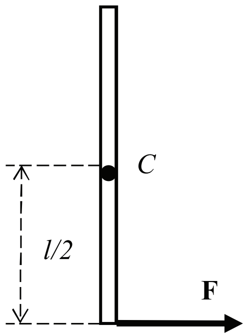

Рис. 1.53

Момент импульса L стержня относительно его центра масс найдем, воспользовавшись уравнением движения момента импульса

$$\Delta L = M\Delta t,$$

$$L = F\frac{l}{2}\Delta t = J\frac{l}{2}.$$

С другой стороны,

$$L = I\omega, \quad I = \frac{1}{12}ml^2,$$

$$\omega = \frac{6J}{ml}.$$

Рассмотрим этот стержень в неинерциальной системе, вращающейся вокруг точки C с угловой скоростью ω (рис. 1.54).

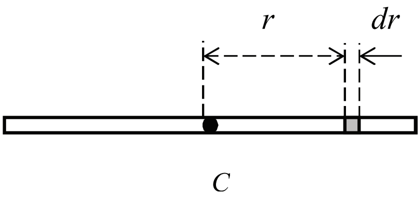

Рис. 1.54

На обе половины стержня будут действовать центробежные силы, стремящиеся растянуть его. Это и будут искомые силы.

Для того чтобы их найти, представим стержень в виде множества малых частей и найдем силу dF, действующую на один из них, имеющий размер dx и находящуюся на расстоянии r от точки C:

$$dF = dm\omega^2 r = \frac{m}{l}\omega^2 r dr.$$

Ответ получим, взяв интеграл

$$F = \int_0^{l/2} \frac{m}{l}\omega^2 r dr = \frac{m}{2l}\omega\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{9J^2}{2ml} = 9{,}0 \text{ Н}.$$

Задача 1.81. Стержень, имеющий длину l и массу m, подвешен к опоре одним из своих концов. Его привели во вращение с угловой скоростью ω так, что он описывает боковую поверхность конуса, образуя с вертикалью угол θ (рис. 1.55). Найти этот угол, а также силу $\mathbf{N}$, действующую на стержень со стороны подвеса.

Решение. Обсудим ситуацию в системе отсчета K', вращающейся вместе со стержнем. Наряду с силами, изображенными на рис. 1.55, в системе K' появляется центробежная сила $\mathbf{F}_{\text{цб}}$ (рис. 1.56), и их равнодействующая равна нулю — стержень покоится в этой системе отсчета.

То же можно сказать и о моментах этих сил относительно точки *O*. Момент силы $\mathbf{N}$ обращается в нуль, а модули моментов силы тяжести и центробежной силы будут равны

$$M_{\text{т}} = M_{\text{цб}}. \qquad (1.19)$$

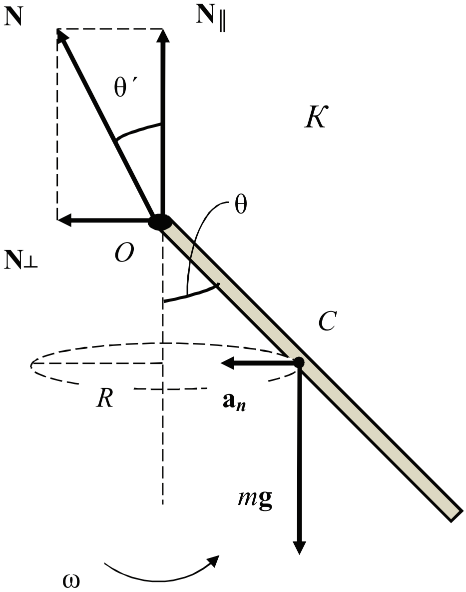

Рис. 1.55

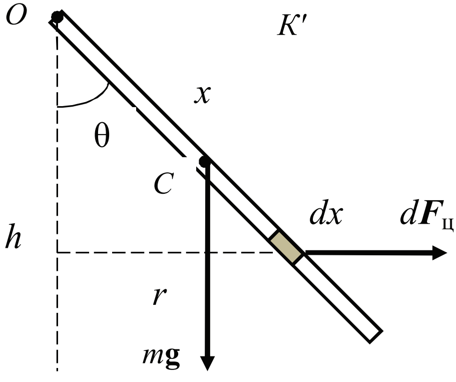

Рис. 1.56

Момент силы тяжести находится легко:

$$M_{\text{т}} = mg\sin\theta,$$

а для вычисления второго момента поступим так. Представим стержень в виде множества малых участков, и рассмотрим один из них, имеющий длину dx и расположенный на расстоянии x точки O. Действующая на него центробежная сила $dF_{\text{цб}}$ равна

$$dF_{\text{цб}} = dm\omega^2 r = dm\omega^2 x\sin\theta = \frac{m}{l}\omega^2 x\sin\theta dx, \qquad (1.20)$$

и момент этой силы

$$dM_{\text{цб}} = dF_{\text{цб}}h = \frac{m}{l}\omega^2 x^2 \sin\theta\cos\theta dx.$$

Таким образом,

$$M_{\text{цб}} = \frac{m}{l}\omega^2 \sin\theta\cos\theta\int_0^l x^2 dx = \frac{ml^2}{3}\omega^2 \sin\theta\cos\theta.$$

Подставим это выражение в формулу (1.19) и найдем ответ на первый вопрос:

$$\cos\theta = \frac{3g}{2\omega^2 l}. \qquad (1.21)$$

При выводе этой формулы мы неявно предполагали выполнение двух условий. Во-первых,

$$\sin\theta \ne 0, \quad \theta \ne 0,$$

то есть стержень имеет определенную угловую скорость, а во-вторых,

$$\cos\theta \prec 1, \quad \frac{3g}{2\omega^2 l} \prec 1, \quad \omega \succ \sqrt{\frac{3g}{2l}}.$$

Эти условия мы подробно обсудили в задаче 1.76.

Перейдем к силе $\mathbf{N}$, действующей на стержень со стороны подвеса. Вращение стержня в лабораторной системе отсчета K обусловлено центростремительной силой $\mathbf{F}_{цс}$ — равнодействующей силы тяжести, приложенной к центру масс стержня C, и силы реакции оси $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{\parallel} + \mathbf{N}_{\perp}$, приложенной к точке O (рис. 1.55):

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{цс} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} = \left(m\mathbf{g} + \mathbf{N}_{\parallel}\right) + \mathbf{N}_{\perp}.$$

Поскольку движение центра масс происходит в горизонтальной плоскости, проекция ускорения на ось вращения равна нулю, а это означает, что $m\mathbf{g} + \mathbf{N}_{\parallel} = 0$, и тогда

$$ma = N_{\perp},$$

$$N_{\perp} = ma = m\omega^2 R = m\omega^2 \frac{l}{2}\sin\theta, \tag{1.22}$$

$$N = \sqrt{N_{\parallel}^{\,2} + N_{\perp}^{\,2}} = \sqrt{(mg)^2 + \left(m\omega^2 \frac{l}{2}\sin\theta\right)^2} =$$

$$= \frac{m\omega^2 l}{2}\sqrt{\left(\frac{2mg}{m\omega^2 l}\right)^2 + \sin^2\theta} = \frac{m\omega^2 l}{2}\sqrt{\left(\frac{2mg}{m\omega^2 l}\right)^2 + 1 - \cos^2\theta}.$$

Воспользуемся формулой (1.21) и получим

$$N = \frac{m\omega^2 l}{2}\sqrt{1 + \frac{7g^2}{4\omega^4 l^2}}. \tag{1.23}$$

Вектор $\mathbf{N}$ образует с осью вращения угол θ', который определим из соотношения

$$\cos\theta' = \frac{N_{\parallel}}{N} = \frac{mg}{N} = \frac{2g}{\omega^2 l\sqrt{1 + \frac{7}{4}\left(\frac{g}{\omega^2 l}\right)^2}}. \tag{1.24}$$

Отметим, что углы θ и θ', определяемые формулами (1.21) и (1.24), не равны, а это значит, что направления вектора **N** и стержня не совпадают. Как следует из формулы (1.21),

$$\frac{g}{\omega^2 l} = \frac{2}{3}\cos\theta,$$

и тогда

$$\cos\theta' = \frac{4\cos\theta}{\sqrt{9+7\cos^2\theta}},$$

или, после несложных преобразований,

$$\frac{\cos\theta'}{\cos\theta} = \frac{4}{\sqrt{9+7\cos^2\theta}} \geq 1, \qquad \theta' \leq \theta,$$

что и видно на рис. 1.55.

В заключение обратим внимание на то, что центробежная сила $\mathbf{F}_{цб}$ приложена не к центру масс *C*, а ниже. Действительно в системе K', связанной со стержнем, моменты силы тяжести и центробежной силы относительно точки подвеса *O* должны быть равны по модулю и компенсировать друг друга, поскольку в системе K' стержень покоится. Поэтому

$$F_{цб} b\cos\theta = mg\frac{l}{2}\sin\theta,$$

где b — расстояние от точки O до точки приложения центробежной силы.

Вычислим центробежную силу, действующую на стержень, проинтегрировав выражение (1.20):

$$F_{цб} = \int_0^l \frac{m}{l}\omega^2 x\sin\theta dx = \frac{m\omega^2 l}{2}\sin\theta.$$

Тогда

$$b = \frac{g}{\omega^2\cos\theta} = \frac{2}{3}l.$$

Задача 1.82. Гладкая горизонтальная платформа вращается с угловой скоростью ω относительно своего центра O. Небольшому телу массы m, находящемуся на оси вращения, сообщили скорость v_0. Как будет меняться со временем его момент импульса относительно точки O в системе отсчета, связанной с платформой? С чем связано это изменение?

Решение. Обсудим ситуацию. Платформа гладкая, трения нет, поэтому в лабораторной системе отсчета тело будет двигаться по прямой, удаляясь от точки O с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0$. Иначе дело будет обстоять в системе K', связанной с вращающейся платформой (рис. 1.57). У тела появится поперечная составляющая скорости $\mathbf{v}_\perp$, обратная линейной скорости точек вращающейся платформы. На расстоянии r от оси вращения

$$v_\perp = \omega r, \quad \mathbf{v}_\perp = -[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}].$$

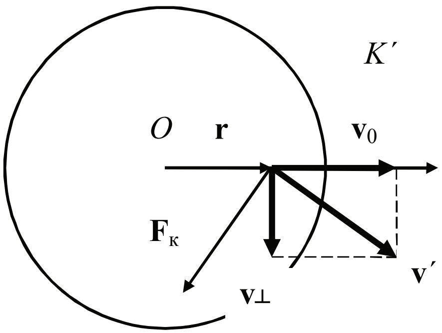

Рис. 1.57

Отметим, что вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ направлен вдоль оси вращения, и его ориентация определяется правилом правого винта.

Таким образом, скорость $\mathbf{v}'$ тела в системе K' будет равна

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}_0 - [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}],$$

и его момент импульса $\mathbf{L}'$

$$\mathbf{L}' = m[\mathbf{r}, \mathbf{v}'] = -m[\mathbf{r}, [\omega, \mathbf{r}]] =$$
$$= -m\left(\omega r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{r}\omega)\right) = -m\omega r^2.$$

Здесь мы учли, что скалярное произведение $\mathbf{r\omega} = 0$ вследствие взаимной перпендикулярности этих векторов.

Расстояние r тела от оси вращения меняется со временем по линейному закону $r = v_0 t$, и мы получаем ответ на первый вопрос задачи:

$$\mathbf{L}' = -mv_0^2\omega.$$

Запишем уравнение движения момента импульса в системе K' :

$$\frac{\mathbf{dL}'}{dt} = \mathbf{M}' = [\mathbf{r} \times \mathbf{F}_\Sigma] = [\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_{цб} + \mathbf{F}_к)] =$$
$$= [\mathbf{r} \times \mathbf{F}_{цб}] + [\mathbf{r} \times \mathbf{F}_к] = [\mathbf{r} \times \mathbf{F}_к].$$

Первое слагаемое обращается в нуль, поскольку входящие в него вектора сонаправлены. Таким образом, изменение со временем вектора $\mathbf{L}'$ обусловлено наличием силы Кориолиса, действующей на тело во вращающейся системе K' .

В справедливости сказанного легко убедиться прямыми вычислениями:

$$[\mathbf{r} \times \mathbf{F}_к] = 2m[\mathbf{r} \times [\mathbf{v}' \times \omega]] = 2m\left(\mathbf{v}'(\mathbf{r}\omega) - \omega(\mathbf{r}\mathbf{v}')\right) =$$
$$= -2m\omega\left(\mathbf{r}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_\perp)\right) = -2m\omega(\mathbf{r}\mathbf{v}_0) = -2mv_0^2 t\omega.$$

Тот же результат дает и производная $\mathbf{dL}'/dt = -2mv_0^2 t\omega.$

2. Теория относительности

2.1. Кинематика теории относительности

Задача 2.1. Две частицы двигаются во взаимно перпендикулярных направлениях с релятивистскими скоростями v_1 и v_2. Найти их относительную скорость?

Решение. В системе отсчета *K*, которую мы назовем лабораторной, скорости частиц имеют проекции на оси

$$v_{1x} = v_1, \quad v_{1y} = 0, \quad v_{2x} = 0, \quad v_{2y} = v_2.$$

Для того чтобы найти скорость одной частицы относительно другой, необходимо связать с одной из них, допустим, с первой, систему отсчета K', скорость которой $V = v_1$ (рис. 2.1). Проекции скорости второй частицы в этой системе отсчета найдем, используя известные соотношения

$$v_{2x}' = \frac{v_{2x} - V}{1 - \frac{v_{2x}V}{c^2}} = -V = -v_1,$$

$$v_{2y}' = \frac{v_{2y}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_{2x}V}{c^2}} = v_2\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}},$$

и тогда относительная скорость частиц будет равна скорости второй частицы в системе отсчета K':

$$v_{\text{отн}} = v_2' = \sqrt{\left(v_{2x}'\right)^2 + \left(v_{2y}'\right)^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2\left(1 - v_1^2/v_2^2\right)}.$$

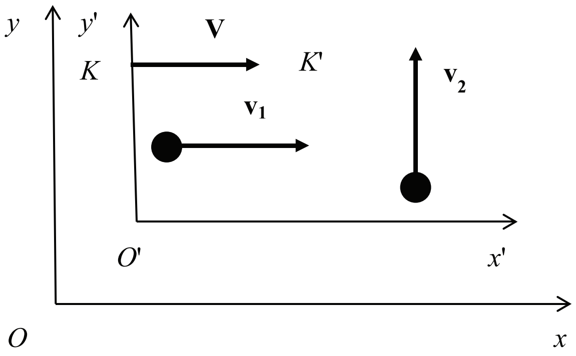

Рис. 2.1

Часто возникает вопрос: а что, если обе частицы двигаются со скоростью света $v_1 = v_1 = c$? Ответ: $v_{\text{отн}} = c$.

Если вопрос сформулировать так: какова скорость *сближения* частиц в лабораторной системе отсчета, то ее можно найти по формуле

$$v_{\text{сбл}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},$$

и если $v_1 = v_1 = c$, то $v_{\text{сбл}} = c\sqrt{2}$ и оказывается больше c ! Как же так? Все нормально. Скорость движения материального объекта не может превышать скорость света, а скорость сближения — это просто скорость сближения.

Задача 2.2. Стержень движется в лабораторной системе отсчета K со скоростью $v = c/2$ так, что он образует с направлением движения угол $\theta = 45^0$ (рис. 2.2). Найти собственную длину l_0 стержня, если в системе K она равна $l = 1$ м ?

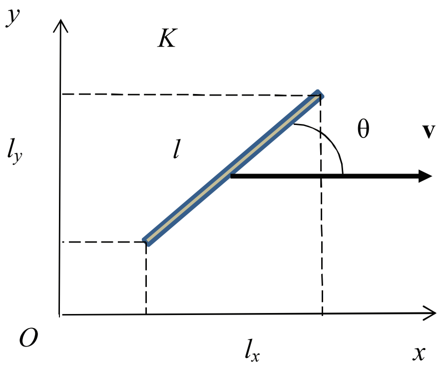

Рис. 2.2

Решение. Проекции стержня на оси системы координат

$$l_x = l\cos\theta, \quad l_y = l\sin\theta.$$

Мы знаем, что поперечные размеры тела не меняются при его движении, тогда как для его продольных размеров существует лоренцево сокращение длины:

$$l_x = l_{x0}\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad l_y = l_{y0},$$

где индекс нуль соответствует собственным размерам тела, то есть его размерам в системе отсчета, связанной со стержнем, в которой он покоится.

Поэтому собственная длина l_0 стержня

$$l_0 = \sqrt{l_{0x}^2 + l_{0y}^2} = l\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{1 - v^2/c^2} + \sin^2\theta} =$$

$$= l\sqrt{\frac{1 - v^2/c^2 \cdot \sin^2\theta}{1 - v^2/c^2}}.$$

Задача 2.3. Два одинаковых стержня, имеющих собственную длину l_0, движутся навстречу друг другу в лабораторной системе отсчета с одинаковой скоростью v, как это показано на рис. 2.3. Какова длина l' одного из стержней в системе отсчета, относительно которой второй стержень покоится?

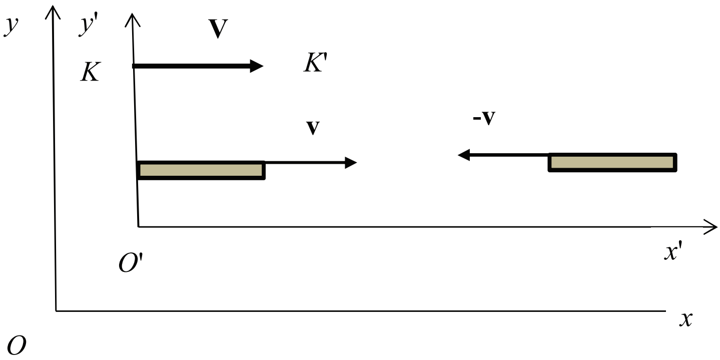

Рис. 2.3

Решение. В формулу для лоренцева сокращения длины стержня, которой мы воспользовались в предыдущей задаче, входит скорость движения стержня. Таким образом, для того чтобы решить эту задачу, необходимо найти относительную скорость движения стержней, то есть скорость второго стержня в системе отсчета K', связанного с первым.

В лабораторной системе отсчета K

$$v_{1x} = v, \qquad v_{2x} = -v.$$

В системе K', связанной со стержнем, движущимся в направлении оси x, скорость будет равны

$$v_{2x}' = \frac{v_{2x} - V}{1 - \frac{v_{2x}V}{c^2}} = -\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}},$$

поэтому длина l' второго стержня в системе K'

$$l' = l_0\sqrt{1-\frac{\left(v_{2x}'\right)^2}{c^2}} = l_0\sqrt{1-\frac{4v^2}{\left(1+v^2/c^2\right)^2 c^2}} =$$

$$= l_0\frac{c^2-v^2}{c^2+v^2} = l_0\frac{1-v^2/c^2}{1+v^2/c^2}.$$

Задача 2.4. На оси x лабораторной системы отсчета K расположены метки A и B, находящиеся друг от друга на расстояние Δx. Вдоль оси x движется стержень таким образом, что в момент времени t_1 его передний торец совпал с меткой A, а затем в моменты t_2 и t_3 метку B пересекли передний и задний торцы соответственно. Найти собственную длину l_0 стержня?

Решение. Скорость стержня в системе K найдем легко:

$$v = \frac{\Delta x}{t_2 - t_1}.$$

Нетрудно найти и длину l стержня в этой системе отсчета — с меткой B торцы стержня совпали в моменты времени t_2 и t_3:

$$l = v\left(t_3 - t_2\right) = \Delta x\frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}.$$

С учетом лоренцева сокращения длины получим ответ:

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\Delta x\dfrac{t_3-t_2}{t_2-t_1}}{\sqrt{1-\dfrac{\Delta x^2}{\left(t_2-t_1\right)^2 c^2}}} = \frac{\Delta x\left(t_3-t_2\right)}{\sqrt{\left(t_2-t_1\right)^2-\left(\dfrac{\Delta x}{c}\right)^2}}.$$

Задача 2.5. В лабораторной системе отсчета K в направлении оси x со скоростью $v = 0{,}990\ c$ двигаются две нестабильные частицы. Расстояние между ними в системе K равно $l = 120$ м .

Частицы испытали распад одновременно по часам в системе отсчета K', связанной с этими частицами. Чему равен промежуток времени Δt, разделяющий эти события по часам в лабораторной системе отсчета?

Решение. Согласно преобразованиям Лоренца промежуток времени Δt, разделяющий эти события в системе *K*,

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' + x_2' V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - \frac{t_1' + x_1' V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} =$$

$$= \frac{\left(t_2' - t_1'\right) + \left(x_2' - x_1'\right) V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{l_0 V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

где $l_0 = x_2' - x_1'$ — расстояние между частицами в системе K' связано с расстоянием l соотношением

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Учитывая, что $V = v$, получим ответ

$$\Delta t = \frac{v\, l/c^2}{1 - v^2/c^2} = 20 \text{ мкс}.$$

Поскольку $\Delta t \succ 0$, то вторая частица испытает распад позже по часам в системе отсчета *K*.

Задача 2.6. В системе K', которая движется относительно лабораторной системы отсчета K со скоростью V вдоль оси x, находится стержень AB, ориентированный параллельно оси x'. Этот стержень движется в системе K' вдоль ее оси y' со скоростью v', как показано на рис. 2.4. Какой угол θ образует стержень с осью x лабораторной системы отсчета?

Решение. Пусть при движении стержня вниз его концы в некоторый момент совпадут с осью x' системы K'. Эти события, одновременные в системе K', не будут таковыми в системе K — их разделит промежуток времени, формулу для которого мы получили в предыдущей задаче:

$$\Delta t = \frac{V\,l/c^2}{1-V^2/c^2},$$

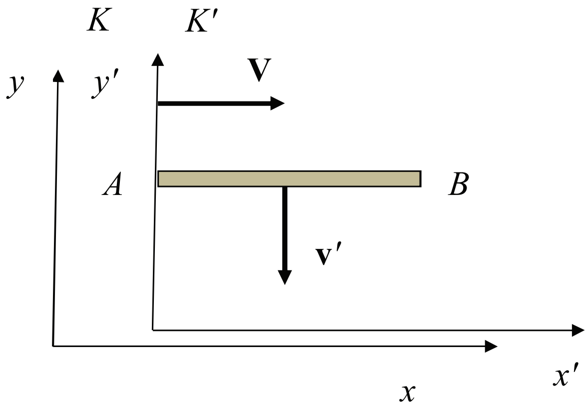

Рис. 2.4

где l — длина стержня в лабораторной системе отсчета.

В K'-системе отсчета стержень имеет компоненты скорости

$$v_x{}' = 0, \quad v_y{}' = -v',$$

и, согласно формулам преобразования, в лабораторной системе компонента v_y примет вид

$$v_y = \frac{v_y{}'\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+v_x{}'V/c^2} = -v'\sqrt{1-V^2/c^2}.$$

Поэтому правый конец стержня в системе K окажется ниже левого на величину $\Delta y = v_y \Delta t$, и стержень будет повернут по отношению к оси x по часовой стрелке на угол, определяемый формулой

$$\tan\theta = \frac{|\Delta y|}{l} = \frac{V\,v'/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Задача 2.7. Нестабильная частица от момента своего рождения до распада пролетела в лабораторной системе отсчета K расстояние $l =$ 3,0 км, двигаясь со скоростью $v = 0{,}990\ c$. Найти:

а) собственное время τ_0 жизни частицы;

б) путь, который она пролетела с «ее точки зрения».

Решение. Время жизни частицы в K-системе $\tau = l/v$, и с учетом эффекта замедления времени в движущейся системе отсчета собственное время τ_0 жизни частицы определим по формуле

$$l_0 = v\tau_0 = l,$$

$$\tau_0 = \tau\sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{l}{v}\sqrt{1-v^2/c^2} = 1{,}4\ \text{мкс}.$$

С «точки зрения» самой частицы она пролетела расстояние

$$l_0 = l\sqrt{1-v^2/c^2} = 0{,}42\ \text{км}.$$

Результаты, полученные в этой несложной задаче, позволяют обсудить важные проблемы, связанные с работой современных ускорителей, устроенных так, что расстояние от источника быстрых частиц до мишени, куда они попадают, зачастую гораздо больше пути, который эти частицы пролетают с «их точки зрения». Рассмотрим в качестве примера известные опыты с π^+-мезонами, собственное время жизни которых равно $\tau_0 \approx 2{,}5\cdot 10^{-8}$ с. Расстояние, которое пролетит мезон без учета эффекта замедления времени, имеет величину $l_0 = v\tau_0 \approx 7{,}5$ м, тогда как реальное расстояние до мишени в современных установках составляет десятки метров. Без этого эффекта использование ускорителей в научных целях было бы просто невозможно.

Задача 2.8. На рис. 2.5 изображена так называемая диаграмма пространства — времени, на которой отмечены три события *A*, *B* и *C*, произошедшие в *K*-системе отсчета. Найти:

а) интервал времени между событиями *A* и *B* в той системе отсчета, в которой эти события произошли в одной точке;

б) расстояние между точками, в которых произошли события *A* и *C*, в той системе отсчета, в которой они оказались одновременными.

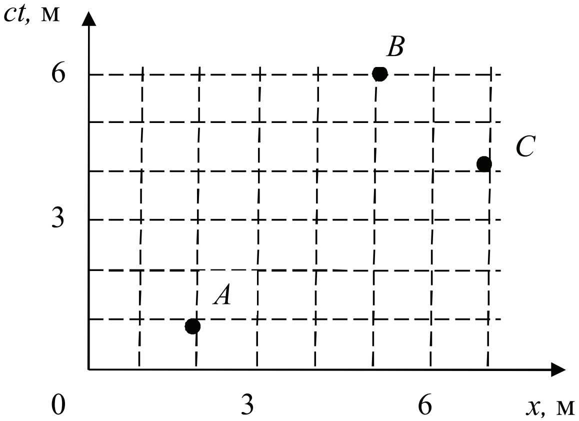

Рис. 2.5

Решение. Для решения этой задачи мы воспользуемся понятием *интервала*, разделяющего два события

$$S_{AB} = \sqrt{c^2\left(t_A - t_B\right)^2 - \left(x_A - x_B\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\left(ct_A - ct_B\right)^2 - \left(x_A - x_B\right)^2}.$$

Он обладает очень важным свойством — это *инвариант* теории относительности, одинаковый в любых инерциальных системах отсчета. В системе *K*, в которой эти события произошли в одной точке,

$$S_{AB} = \sqrt{(1-6)^2 - (2-5)^2} = 4 \text{ м}.$$

В системе отсчета K', в которой эти события произошли в одной точке,

$$S_{AB}' = \sqrt{c^2\left(t_A' - t_B'\right)^2 - \left(x_A' - x_B'\right)^2} =$$

$$= c\left(t_A' - t_B'\right) = c\Delta t' = S_{AB},$$

$$\Delta t' = \frac{S_{AB}}{c} = \frac{4}{3\cdot 10^8} \approx 1{,}33\cdot 10^{-8} \text{ с}.$$

В системе K'', где события произошли одновременно,

$$S_{AC}'' = \sqrt{c^2\left(t_A'' - t_C''\right)^2 - \left(x_A'' - x_C''\right)^2} =$$

$$= i\left(x_A'' - x_C''\right) = i\Delta x'' = S_{AC},$$

$$S_{AC} = \sqrt{(ct_A - ct_C)^2 - (x_A - x_C)^2} =$$

$$= \sqrt{(1-4)^2 - (2-7)^2} = i4 \text{ м},$$

$$\Delta x'' = 4 \text{ м}.$$

Нам осталось обсудить полученные результаты. Интервал S_{AB}' — вещественный и называется времениподобным. События, разделенные таким интервалом, могут быть связаны причинно-следственными связями. Интервал S_{AC}' — мнимый. Он называется пространственноподобным, и события, разделенные таким интервалом, не могут в принципе быть связаны причинно-следственными связями.

Задача 2.9. Воображаемый космический аппарат, стартовавший с Земли, летит с ускорением $a' = 10g$, одинаковым в каждой мгновенно сопутствующей ему инерциальной системе. Длительность полета по земным часам составила $\tau = 1$ год. Найти скорость аппарата в конце разгона и пройденный им путь.

Решение. Для начала установим соотношение, связывающее между собой ускорение a аппарата в системе отсчета, связанной с Землей (K-система) и его ускорение a' в инерциальной системе K', движущейся относительно системы K со скоростью V. Считая, что аппарат перемещается вдоль оси x, имея в некоторый момент мгновенную скорость v_x, запишем

$$a_x' = \frac{dv_x'}{dt'} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}\right)\frac{dt}{dt'}.$$

Проведем дифференцирование

$$a_x' = \frac{a_x\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right) + \left(v_x - V\right)\frac{V}{c^2}a_x}{\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)^2} \cdot \frac{dt\sqrt{1 - V^2/c^2}}{dt - \frac{V}{c^2}dx} =$$

$$= \frac{a_x\left(1 - V^2/c^2\right)}{\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)^2} \cdot \frac{\left(1 - V^2/c^2\right)^{1/2}}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} = a_x\frac{\left(1 - V^2/c^2\right)^{3/2}}{\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)^3}$$

и учтем, что для каждой мгновенно сопутствующей аппарату инерциальной системы $V = v_x$:

$$a_x' = \frac{a_x}{\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{dv_x/dt}{\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}},$$

$$a_x' dt = \frac{dv_x}{\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}},$$

$$\int_0^t a_x' dt = \int_0^v \frac{dv_x}{\left(1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}}.$$

Интеграл слева равен $a_x't$, а стоящий в правой части является табличным:

$$\int_0^v \frac{dv_x}{\left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Таким образом,

$$\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = a_x't,$$

$$v = \frac{a_x't}{\sqrt{1+\left(a_x't\right)^2/c^2}} = \frac{10gt}{\sqrt{1+(10gt)^2/c^2}}.$$

Конечная скорость аппарата при $t=\tau$

$$v_\tau = \frac{a_x'\tau}{\sqrt{1+\left(a_x'\tau\right)^2/c^2}} = \frac{10g\tau}{\sqrt{1+(10g\tau)^2/c^2}} \approx 0,47c.$$

Нам осталось найти путь, пройденный аппаратом:

$$s = \int_0^\tau v dt = \int_0^\tau \frac{10gtdt}{\sqrt{1+(10gt)^2/c^2}} =$$

$$= \frac{c^2}{10g}\left(\sqrt{1+(10g\tau)^2/c^2}-1\right) \approx 8,6\cdot 10^{15} \text{ м}.$$

Задача 2.10. Используя условия задачи 2.9 найти время τ_0, затраченное на разгон космического аппарата по его часам, если длительность его полета по земным часам составила $\tau = 1$ год.

Решение. Время $d\tau_0$ по часам, находящимся в аппарате (собственное время), связано с временем dt, определенным по земным часам, соотношением $d\tau_0 = dt\sqrt{1-v^2/c^2}$, поэтому

$$\tau_0 = \int_0^{\tau} \sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt,$$

где скорость аппарата зависит от времени по закону

$$v = \frac{a_x' t}{\sqrt{1 + \left(a_x' t\right)^2 / c^2}}.$$

Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} = \sqrt{1 - \frac{\left(a_x' t\right)^2}{\left(1 + \left(a_x' t\right)^2 / c^2\right) c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(a_x' t / c\right)^2}},$$

и тогда

$$\tau_0 = \int_0^{\tau} \sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt = \int_0^{\tau} \frac{dt}{\sqrt{1 + \left(a_x' t / c\right)^2}} =$$

$$= \left(\frac{c}{a_x'}\right)^2 \ln\left|\frac{a_x' t}{c} + \sqrt{1 + \left(\frac{a_x' t}{c}\right)^2}\right|_0^{\tau} =$$

$$= \left(\frac{c}{10g}\right)^2 \ln\left|\frac{10g\tau}{c} + \sqrt{1 + \left(\frac{10g\tau}{c}\right)^2}\right| \approx 3{,}5 \text{ мес.}$$

Полученный результат свидетельствует о том, что темп хода часов в космическом аппарате ниже, чем у земных часов, то есть время на его борту течет медленнее, чем на Земле. Почему? С этим результатом связан так называемый «парадокс близнецов». Обсудим его. Возьмем двое одинаковых часов, допустим, *A* и *B*, показывающих одинаковое время. Затем сообщим часам *B* ускорение, и разгоним их до определенной скорости.

Как следует из результата задачи, темп хода этих часов будет более низким, чем у часов *A*. Теперь рассмотрим эту ситуацию с точки зрения наблюдателя, находящегося на борту аппарата — теперь часы *A* удаляются от него с той же скоростью, и запаздывать должны именно они. Возникает явное противоречие, которое и лежит в основе этого парадокса.

Но в действительности парадокса нет. Система отсчета, связанная с *ускоренно* движущимся аппаратом, является *неинерциальной*, и для нее не выполняются выводы, сделанные в рамках специальной теории относительности. Детальный расчет на основе общей теории приводит к тому, что медленнее будут двигаться именно часы *B*.

2.2. Релятивистская динамика

Задача 2.11. Чему равна сила, под действием которой частица массы m движется в направлении оси x так, что ее координата изменяется по закону $x = \sqrt{\alpha^2 + c^2 t^2}$, c — скорость света, d — постоянная величина?

Решение. Скорость частицы изменяется со временем по закону

$$v = \frac{dx}{dt} = c^2 t\left(\alpha^2 + c^2 t^2\right)^{-1/2},$$

а импульс

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{mc^2 t}{\alpha}.$$

По второму закону Ньютона

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{mc^2}{\alpha}.$$

Любопытно, что с течением времени скорость частицы асимптотически стремится к скорости света и практически не меняется при больших временах, но импульс при этом продолжает расти по линейному закону.

Задача 2.12. На частицу массы m, движущуюся со скоростью $\mathbf{v}$, действует сила $\mathbf{F}$. В каких случаях вектор ускорения $\mathbf{a}$ частицы будет совпадать по направлению с вектором силы? Чему оно будет равно?

Решение. На первый взгляд, это странный вопрос, ведь согласно второму закону Ньютона, записанному в виде $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$, ускорение тела всегда сонаправлено силе, к этому телу приложенной. Однако это формула «работает» только в нерелятивистской области, а в случае скоростей, сопоставимых со скоростью света, необходимо использовать общее соотношение

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{dp}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right).$$

Проведем дифференцирование:

$$\mathbf{F} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{\mathbf{dv}}{dt} + m\mathbf{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) =$$

$$= \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\mathbf{a} + m\mathbf{v}\left(\frac{v}{c^2\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}}\frac{dv}{dt}\right),$$

и запишем это равенство в виде

$$\frac{\mathbf{F}}{m}\sqrt{1-v^2/c^2} = \mathbf{a} + \mathbf{v}\left(\frac{v/c^2}{1-v^2/c^2}\frac{dv}{dt}\right),$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}\sqrt{1-v^2/c^2} - \mathbf{v}\left(\frac{v/c^2}{1-v^2/c^2}\frac{dv}{dt}\right), \qquad (2.25)$$

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{F} - \beta\mathbf{v},$$

где мы использовали обозначения

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}{m}, \quad \beta = \frac{v / c^2}{1 - v^2 / c^2} \frac{dv}{dt}.$$

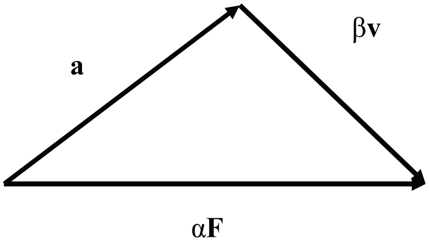

Рис. 2.6

Представим последнее векторное равенство графически (рис. 2.6). Мы видим, что в общем случае вектор ускорения образует с вектором силы некоторый угол — они не сонаправлены! Рассмотрим случаи, когда вектор ускорения **a** частицы будет совпадать по направлению с вектором силы. Таких случаев два.

1. Сила **F** направлена параллельно вектору скорости **v** (продольная сила). В этом случае векторное равенство (2.25) запишем в скалярной форме:

$$a = \frac{F}{m}\sqrt{1 - v^2 / c^2} - v\left(\frac{v / c^2}{1 - v^2 / c^2} \frac{dv}{dt}\right) =$$

$$= \frac{F}{m}\sqrt{1 - v^2 / c^2} - \frac{v^2 / c^2}{1 - v^2 / c^2} a,$$

$$a\left(1 + \frac{v^2 / c^2}{1 - v^2 / c^2}\right) = \frac{F}{m}\sqrt{1 - v^2 / c^2},$$

$$a = \frac{F}{m}\left(1 - v^2 / c^2\right)^{3/2}.$$

2. Поперечная сила $(\mathbf{F} \perp \mathbf{v})$. Сила, перпендикулярная направлению движения частицы, работы не совершает, поэтому кинетическая энергия частицы не меняется, и скорость частицы по модулю остается неизменной. Это означает, что производная dv / dt в правой части равенства (2.25) обращается в нуль, и тогда

$$a = \frac{F}{m}\left(1 - v^2 / c^2\right)^{1/2}.$$

В обоих случаях в нерелятивистском диапазоне имеем $a = F / m$, но при скоростях, сопоставимых со скоростью света, формулы для ускорения отличаются друг от друга — ускорение, сообщаемое частице поперечной силой, оказывается больше. Это приходится учитывать при проектировании линейных и резонансных ускорителей (циклотронов).

Задача 2.13. Найти работу, совершенную внешними силами над частицей массы m, если ее скорость возросла от 0,60 c до 0,80 c. Сравнить полученный результат с рассчитанным в рамках нерелятивистских представлений.

Решение. По теореме о кинетической энергии

$$A = \Delta W_k = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2 / c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2 / c^2}}\right) = 0,42mc^2.$$

В классическом варианте

$$A = \Delta W_k = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = 0,14mc^2.$$

Задача 2.14. Релятивистская частица имеет импульс $p = 865$ Мэв/c и кинетическую энергию $W_k = 500$ Мэв. Найти ее скорость.

Решение. Импульс и кинетическая энергия частицы описываются формулами

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}, \qquad W_k = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} - 1\right).$$

Найдем отношение

$$\frac{W_k}{p} = \frac{c^2\left(1 - \sqrt{1 - v^2 / c^2}\right)}{v},$$

и проведем несложные преобразования

$$\frac{W_k}{c^2 p} v = 1 - \sqrt{1 - v^2 / c^2},$$

$$\left(\frac{W_k}{c^2 p} v - 1 \right)^2 = 1 - v^2 / c^2,$$

$$\left(\frac{W_k}{c^2 p} \right)^2 v^2 - 2 \frac{W_k}{c^2 p} v = -v^2 / c^2,$$

$$\left(1 + \left(\frac{W_k}{cp} \right)^2 \right) v = 2 \frac{W_k}{p},$$

$$v = \frac{2pW_k}{p^2 + W_k{}^2 / c^2} = 0,87c.$$

Задача 2.15. Чему равен импульс протона, имеющего кинетическую энергию $W_k = 500$ Мэв?

Решение. Для начала установим связь энергии W релятивистской частицы и ее импульса p. Поступим так:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$

$$p^2 - p^2 \frac{v^2}{c^2} = m^2 c^2,$$

$$v = \frac{cp}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}.$$

Подставим это выражение в формулу для энергии частицы

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - p^2 / \left(p^2 + m^2 c^2 \right)}} = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}, \quad (2.26)$$

и преобразуем ее

$$\left(mc^2 + W_k\right)^2 = c^2 p^2 + \left(mc^2\right)^2,$$

$$c^2 p^2 = W_k\left(W_k + 2mc^2\right),$$

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{W_k\left(W_k + 2mc^2\right)}. \qquad (2.27)$$

Подставим числовые значения: $p = 1{,}09$ Гэв/c.

Задача 2.16. Пучок протонов, обладающих кинетической энергией W_k, попадает на заземленную мишень. Какова сила давления протонов на мишень, а также выделяемая в ней мощность?

Решение. По второму закону Ньютона силу давления пучка на мишень можно представить как

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p\Delta N}{\Delta t} = \frac{p\Delta N}{\Delta t}\frac{e}{e} = \frac{pI}{e}.$$

Поясним сделанное: p — импульс одного протона, e — его заряд, ΔN — число протонов, попадающих на мишень за время Δt, $I = e\Delta N / \Delta t$ — сила тока в пучке. Импульс протона определяется формулой (2.27), полученной в задаче 2.15.

Таким образом,

$$F = \frac{I}{ec}\sqrt{W_k\left(W_k + 2mc^2\right)}.$$

Под мощностью здесь мы понимаем тепловую энергию, выделяемую в мишени в единицу времени. Она равна

$$P = \frac{\Delta W_k}{\Delta t} = \frac{\Delta N W_k}{\Delta t} = \frac{\Delta N W_k}{\Delta t}\frac{e}{e} = \frac{W_k I}{e}.$$

Задача 2.17. Релятивистская частица движется вдоль оси x лабораторной системы отсчета K, обладая энергией W и импульсом p. Найти ее энергию и импульс в системе отсчета K', движущейся в этом же направлении со скоростью V относительно K-системы.

Решение. В K-системе отсчета частица движется со скоростью $v_x = dx/dt$, имея импульс

$$p_x = \frac{mv_x}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}} = \frac{m}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}}\frac{dx}{dt}.$$

Воспользуемся элементарным интервалом

$$dS = \sqrt{c^2dt^2 - dx^2} = cdt\sqrt{1-(dx/cdt)^2} = cdt\sqrt{1-(v_x/c)^2},$$

$$dt\sqrt{1-(v_x/c)^2} = \frac{dS}{c},$$

и тогда

$$p_x = mc\frac{dx}{dS}, \quad dx = \frac{p_x dS}{mc}.$$

Энергия частицы

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}}\frac{dt}{dt} =$$

$$= mc^3\frac{dt}{dS}, \quad dt = \frac{WdS}{mc^3}.$$

Интервал — инвариант теории относительности, поэтому при переходе в систему K' x-я компонента импульса и энергия будут преобразовываться так же, как dx и dt:

$$dx' = \frac{dx - Vdt}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad p_x' = \frac{p_x - VW/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}},$$

$$dt' = \frac{dt - (V/c^2)dx}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad W' = \frac{W - p_xV}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

По тем же соображениям поперечные компоненты импульса меняться не будут.

Задача 2.18. В лабораторной системе отсчета движется фотон, имеющий энергию ε. Какова будет энергия этого фотона ε' в системе K', которая перемещается относительно *K*-системы со скоростью *V*. При каком значении этой скорости энергия фотона станет равной $\varepsilon' = \varepsilon / 2$?

Решение. Согласно формуле (2.26), полученной в задаче 2.15, $\varepsilon = cp$, и в этом случае

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon - \varepsilon V / c}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}} = \varepsilon \frac{1 - V / c}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}} = \varepsilon \sqrt{\frac{1 - V / c}{1 + V / c}}.$$

Если $\varepsilon' = \varepsilon / 2$, то

$$\frac{1}{4} = \frac{1 - V / c}{1 + V / c},$$

$$V = \frac{3}{5} c.$$

Задача 2.19. Показать, что выражение $(W - p^2c^2)$ для релятивистской частицы является инвариантом теории относительности, то есть не меняется при переходе из одной инерциальной системы отсчета (ИСО) в другую.

Решение. Воспользуемся формулой (2.26), полученной в задаче 2.15, и представим ее в виде

$$W^2 - p^2c^2 = m^2c^4 = W_0^2,$$

где W_0 — энергия покоя частицы, которая не зависит от выбора системы отсчета. Это означает, что и левая часть этого равенства одинакова во всех ИСО, то есть является *инвариантом* теории относительности:

$$W^2 - p^2c^2 = \text{inv}. \qquad (2.28)$$

В заключение вернемся к формуле

$$W = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}.$$

Из нее следует возможность существования частиц с *нулевой массой*!

Законы ньютоновской механики не допускают существование частиц нулевой массы. Такие частицы под действием ничтожно малой силы получали бы бесконечно большое ускорение. Однако существование таких частиц не противоречит законам релятивистской механики.

Действительно, при $m = 0$ $W = cp$. Пусть частица движется вдоль оси x. Тогда $W = cp_x$. Воспользуемся известным уравнением, которое называется *уравнение Гамильтона* ($v_x = \partial W/\partial p_x$), и применим его:

$$v_x = \partial W/\partial p_x = \partial(cp_x)/\partial p_x = c.$$

Таким образом, согласно теории относительности, частицы с нулевой массой могут существовать, но *только двигаясь со скоростью света*. Остановка подобной частицы равносильна ее поглощению (уничтожению). К числу частиц с нулевой массой принадлежит, например *фотон*.

Задача 2.20. Частица массы m, имеющая кинетическую энергию W_k, налетает на покоящуюся частицу той же массы. Найти массу M и скорость V составной частицы, образовавшейся в результате столкновения.

Решение. Применим инвариант, полученный в предыдущей задаче, и запишем его в виде:

$$W^2 - p^2c^2 = (W')^2 - (p')^2 c^2,$$

где нештрихованные величины в левой части относятся к лабораторной системе отсчета K, а штрихованные в правой части — к системе K', связанной с составной частицей, т. е. являющейся *системой центра масс*.

Энергия частиц в *K*-системе равна сумме их энергий покоя и кинетической энергии первой частицы $W = W_k + 2mc^2$, а импульс

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{W_k\left(W_k + 2mc^2\right)}.$$

В системе центра масс $p' = 0$ и $W' = Mc^2$, где M — масса составной частицы.

Таким образом,

$$\left(W_k + 2mc^2\right)^2 - W\left(W_k + 2mc^2\right) = M^2c^4,$$

$$M = \frac{1}{c}\sqrt{2m\left(W_k + 2mc^2\right)} = 2m\sqrt{1 + \frac{W_k}{2mc^2}}.$$

Мы видим, что масса составной частицы оказалась больше суммы масс исходных частиц. Этот результат вполне понятен исходя из взаимной связи массы и энергии. Если $W_k \ll 2mc^2$, то сумма масс частиц не меняется в процессе столкновения.

Для нахождения скорости образовавшейся частицы поступим следующим образом. Преобразуем формулу Эйнштейна к виду

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{c^2}{v} = \frac{pc^2}{v},$$

$$p = \frac{vW}{c^2},$$

и применим ее для *системы двух частиц*. При этом $W = W_k + 2mc^2$, а скорость v — это скорость движения центра масс частиц, которая, естественно, совпадает со скоростью V движения составной частицы:

$$V = \frac{pc^2}{W} = \frac{c\sqrt{W_k\left(W_k + 2mc^2\right)}}{W_k + 2mc^2} = \frac{c}{\sqrt{1 + 2mc^2/W_k}}.$$

Задача 2.21. В лабораторной системе отсчета K нейтрон, обладающий кинетической энергией $W_k = 2mc^2$, движется в сторону покоящегося нейтрона. Чему будет равна их кинетическая энергия W_k' в системе их центра масс (в C-системе)? Чему будет равен импульс p_1' каждого нейтрона в C-системе?

Решение. Для решения задачи применим инвариант (2.28), полученный в задаче 2.19, и представим его в виде равенства

$$W^2 - p^2c^2 = W'^2 - p'^2c^2, \tag{2.29}$$

где в левой части приведены величины, характеризующие нейтроны в лабораторной системе K, а в правой — в C — системе отсчета.

Тогда в K-системе

$$W = 2W_0 + W_k = 2mc^2 + 2mc^2 = 4mc^2, \tag{2.30}$$

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{W_k\left(W_k + 2mc^2\right)} = 2\sqrt{2}mc, \tag{2.31}$$

а в C-системе

$$\begin{aligned} &W' = 2W_0' + W_k' = 2mc^2 + W_k', \\ &p' = 0. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Подставим уравнения (2.30)–(2.32) в равенство (2.29) и получим первый ответ

$$16m^2c^4 - 8m^2c^4 = \left(2mc^2 + W_k'\right)^2,$$

$$W_k' = 2mc^2\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

Учтем, что поскольку в C-системе суммарный импульс нейтронов равен нулю, импульсы нейтронов должны быть противоположно направлены и одинаковы по величине, а это значит, что должны быть равны и их кинетические энергии. Следовательно, кинетическая энергия одного нейтрона в системе центра масс

$$W'_{k1} = mc^2\left(\sqrt{2}-1\right),$$

и его импульс

$$p_1 = \frac{1}{c}\sqrt{W_{k1}'\left(W_{k1}' + 2mc^2\right)} = \\ = \frac{1}{c}\sqrt{m^2c^4\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} = mc.$$

Задача 2.22. Так как период обращения электронов в однородном магнитном поле с ростом энергии резко увеличивается, циклотрон оказывается непригодным для их ускорения. Этот недостаток устраняется в *микротроне* (рис. 2.7), где изменение периода обращения электрона ΔT делают кратным периоду ускоряющего поля T_0. Сколько раз электрону необходимо пройти через ускоряющий промежуток микротрона, чтобы приобрести энергию $W = 4{,}6$ МэВ, если $\Delta T = T_0$, индукция магнитного поля $B = 107$ мТл и частота ускоряющего поля $\nu = 3000$ МГц?

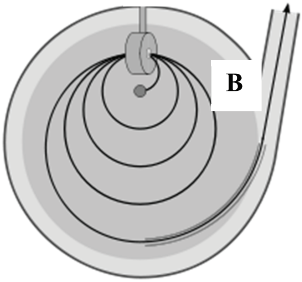

Рис. 2.7

Решение. Для двух последовательных оборотов (например, под номерами $(n-1)$ и n) период обращения увеличивается на величину ΔT, которую мы рассчитаем следующим образом.

Период обращения заряда q в поперечном магнитном поле с индукцией B определяется формулой

$$T = \frac{2\pi m}{qB},$$

где m — его масса, которая с ростом скорости меняется по закону

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Поэтому

$$T = \frac{2\pi m_0}{qB\sqrt{1 - v^2 / c^2}}, \tag{2.33}$$

и тогда

$$\Delta T = T_n - T_{n-1} = \frac{2\pi m}{qB}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_n^2/c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - v_{n-1}^2/c^2}}\right),$$

где v_n и v_{n-1} — скорости электрона при совершении им оборотов под номерами n и $n-1$.

Воспользуемся известной формулой для расчета кинетической энергии релятивистской частицы и преобразуем ее:

$$W_k = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} - 1\right), \qquad \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{W_k}{mc^2} - 1,$$

и получим

$$\Delta T = \frac{2\pi}{qBc^2}\left(W_{k,n} - W_{k,n-1}\right) = \frac{2\pi}{qBc^2}\Delta W_k,$$

$$\Delta W_k = \frac{qBc^2}{2\pi}\Delta T.$$

Теперь мы может ответить на вопрос задачи:

$$N = \frac{W}{\Delta W_k} = \frac{2\pi W}{qBc^2 \Delta T} = \frac{2\pi W}{qBc^2 T_0} = \frac{2\pi W \nu}{qBc^2} = 9.$$

Описанное устройство называется *микротрон.*

Задача. 2.23. Особенностью работы циклотрона является неизменность периода обращения ускоряемых частиц в постоянном магнитном поле с индукцией B, и, следовательно, постоянство частоты генератора, создающего переменное электрическое поле в зазоре между дуантами. Это накладывает ограничение на максимальное значение энергии ускоряемых частиц, поскольку с увеличением скорости частиц в силу релятивистских эффектов происходит увеличение периода их обращения, о чем говорилось в предыдущей задаче. Это ограничение можно в значительной мере преодолеть, если уменьшать (модулировать) частоту переменного поля в процессе ускорения частиц. Каким должен быть закон, по которому изменяется частота $\omega(t)$, если частица массы m и заряда q получает за оборот приращение энергии ΔW?

Решение. Скорость изменения кинетической энергии со временем определяется ее производной

$$\frac{dW_k}{dt} = mc^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right) = \frac{mv}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}}\frac{dv}{dt}.$$

С другой стороны,

$$\frac{dW_k}{dt} = \frac{\Delta W_k}{T}.$$

Согласно формуле (2.33) предыдущей задачи

$$T = \frac{2\pi m_0}{qB\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

и тогда

$$\frac{m_0 v}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}}\frac{dv}{dt} = \frac{\Delta W_k qB\sqrt{1-v^2/c^2}}{2\pi m_0}.$$

Преобразуем это равенство и проинтегрируем его:

$$\frac{v}{\left(1-v^2/c^2\right)^2}dv = \frac{\Delta W_k qB}{2\pi m_0^2}dt,$$

$$\int_0^v \frac{v}{\left(1-v^2/c^2\right)^2}dv = \int_0^t \frac{\Delta W_k qB}{2\pi m_0^2}dt,$$

$$c^2\left(\frac{1}{1-v^2/c^2}-1\right)=\frac{\Delta W_k qB}{\pi m_0^2}t,$$

$$\frac{1}{1-v^2/c^2}=\frac{\Delta W_k qB}{\pi m_0^2 c^2}t+1.$$

Учитывая, что частота генератора связана с периодом соотношением $\omega = 2\pi / T$, получим

$$\omega = \frac{qB}{m_0}\sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{qB}{m_0\sqrt{\dfrac{\Delta W_k qB}{\pi m_0^2 c^2}t+1}}.$$

Используя обозначения

$$\omega_0 = \frac{qB}{m_0}, \quad \alpha = \frac{\Delta W_k qB}{\pi m_0^2 c^2},$$

запишем результат в компактной форме

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+\alpha t}}.$$

Описанное устройство носит название *фазотрон*, и оно позволяет получать частицы с энергиями до 1 ГэВ, что на два порядка превышает возможности обычных циклотронов. Фазотроны, как и циклотроны, используют для ускорения тяжелых заряженных частиц — протонов и ионов. Применять их для разгона легких частиц, допустим, электронов, неэффективно — их движение очень быстро приобретает релятивистский характер, приводя к нарушению синхронизации частоты генератора и частоты обращения заряда в магнитном поле. Для этой цели используются другие устройства. Одно из них — микротрон, описанный в предыдущей задаче.

Задача 2.24. В результате упругого столкновения релятивистского протона с покоящимся, произошло симметричное упругое рассеяние — углы, под которыми стали двигаться протоны после столкновения, оказались одинаковыми по отношению к направлению первоначального движения (рис. 2.8). Чему равен угол разлета протонов θ, если кинетическая энергия налетающего протона W_k ?

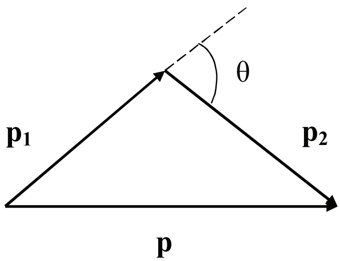

Рис. 2.8

Решение. Согласно закону сохранения импульса

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2.$$

Из треугольника импульсов, изображенного на рис. 2.8, следует, что

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\theta.$$

Поскольку рассеяние симметричное, $p_1 = p_2$, и поэтому

$$p^2 = 2p_1^2\left(1+\cos\theta\right),$$

$$\cos\theta = \frac{p^2}{2p_1^2} - 1.$$

Воспользуемся связью импульса и кинетической энергии (см. формулу (2.27) задачи 2.15)

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{W_k\left(W_k + 2mc^2\right)},$$

$$p_1 = \frac{1}{c}\sqrt{W_{k_1}\left(W_{k_1} + 2mc^2\right)},$$

и с учетом того, что $W_k = 2W_{k1}$, получим

$$\frac{p^2}{2p_1^2} = \frac{W_k + 2mc^2}{2W_{k1}\left(W_{k_1} + 2mc^2\right)} = 2\frac{W_k + 2mc^2}{W_k + 4mc^2},$$

и запишем ответ

$$\cos\theta = \frac{W_k}{W_k + 4mc^2}.$$

Отметим в заключение, что если $W_k \succ 0$, а это очевидно из условия задачи, то $\cos\theta \succ 0$ и $\theta \prec 90^0$ — угол разлета всегда меньше 90^0. В нерелятивистском случае вариант $\theta = 90^0$ возможен.

Задача 2.25. Фотон с энергией ε испытал рассеяние на покоящемся свободном электроне. Найти энергию έ рассеянного фотона, если угол между направлениями движения рассеянного и налетающего фотонов равен θ (рис. 2.9).

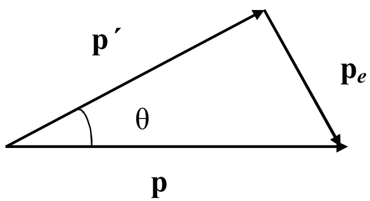

Рис. 2.9

Решение. Воспользуемся законами сохранения импульса и энергии

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}_e, \quad \mathbf{p}_e = \mathbf{p} - \mathbf{p}',$$
$$\varepsilon = \varepsilon' + W_e, \quad W_e = \varepsilon - \varepsilon'.$$

В этих выражениях индекс e относится к импульсу электрона и его кинетической энергии.

Как видно из рис. 2.9,

$$p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\theta.$$

Воспользуемся формулой (2.27) задачи 2.15 и соотношением, связывающим энергию и импульс фотона,

$$\frac{1}{c^2} W_e\left(W_e + 2mc^2\right) = \frac{\varepsilon^2}{c^2} + \frac{\varepsilon'^2}{c^2} - 2\frac{\varepsilon\varepsilon'}{c^2}\cos\theta,$$
$$(\varepsilon - \varepsilon')\left(\varepsilon - \varepsilon' + 2mc^2\right) = \varepsilon^2 + \varepsilon'^2 - 2\varepsilon\varepsilon'\cos\theta,$$
$$(1 - \cos\theta)\varepsilon\varepsilon' = (\varepsilon - \varepsilon')mc^2,$$

$$\frac{2\varepsilon\varepsilon'}{mc^2}\sin^2\frac{\theta}{2}=\varepsilon-\varepsilon',$$

$$\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{1+\dfrac{2\varepsilon}{mc^2}\sin^2\dfrac{\theta}{2}}.$$

Формула, которую мы получили, описывает явление, которое называется *эффект Комптона*. Оказалось, что при рассеянии рентгеновского излучения на свободных электронах (на практике — это электрон, находящийся на внешней оболочке щелочного атома и слабо связанный с ядром), в спектре рассеянного излучения наряду с линией, соответствующей изначальной длине волны λ, появляется дополнительная компонента, длина волны которой $\lambda' > \lambda$. Этой компоненте соответствуют фотоны, энергия которых ε' меньше энергии падающих фотонов ε. Ее мы и нашли в этой задаче. Описанное явление служит подтверждением корпускулярных свойств рентгеновского излучения и его электромагнитной природы. За открытие и объяснение этого эффекта Комптон получил Нобелевскую премию.

Задача 2.26. В лабораторной системе отсчета K навстречу друг другу летят два релятивистских протона, обладающие одинаковыми энергиями W_k. Какова будет кинетическая энергия W_k' протона в системе K', связанной с другим протоном?

Решение. Для решения задачи применим инвариант (2.28), полученный в задаче 2.19, и представим его в виде равенства

$$W^2-p^2c^2=W'^2-p'^2c^2, \tag{2.34}$$

где в левой части приведены величины, характеризующие протоны в лабораторной системе K, а в правой — в системе K', связанной с одним из протонов.

В K-системе энергия протонов

$$W=2W_k+2W_0=2\left(W_k+mc^2\right),$$

а их суммарный импульс равен нулю: система K — это система центра масс протонов.

В системе K'

$$W' = 2W_k + 2W_0 = 2W_k' + 2mc^2,$$

$$p_1' = \frac{1}{c}\sqrt{W_k'\left(W_k' + 2mc^2\right)}.$$

После подстановки в равенство (2.34) получим

$$4\left(W_k + mc^2\right)^2 = \left(2W_k' + 2mc^2\right)^2 - W_k'\left(2W_k' + 2mc^2\right),$$

$$W_k' = \frac{2\left(W_k + 2mc^2\right)}{mc^2}.$$

Мы получили важный результат, который рассмотрим с практической точки зрения. Пусть в лабораторной системе отсчета протоны имеют одинаковые кинетические энергии $W_k = 50$ ГэВ. Энергия покоя протона $W_0 \approx 1$ ГэВ. В этом случае $W_k' \approx 5 \cdot 10^3$ ГэВ — мы получили колоссальный «выигрыш» в энергии! Это метод встречных пучков, применяемый в современных ускорителях.

Задача 2.27. В лабораторной системе отсчета релятивистская частица распалась на два γ-фотона с энергиями ε_1 и ε_2. Найти их угол разлета θ.

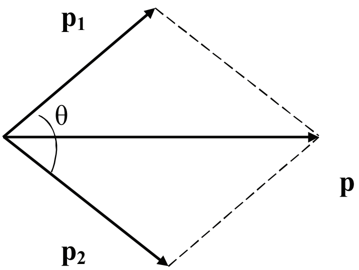

Рис. 2.10

Решение. Свяжем с частицей систему отсчета K'. В ней энергия частицы определяется энергией покоя, и равна $W' = mc^2$, а импульс $p' = 0$. После распада рассмотрим процесс в лабораторной системе K (рис. 2.10):

$$W = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2,$$
$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos\theta.$$

Используя инвариант (2.28), полученный в задаче 2.19, и применив соотношения $p_1 = \varepsilon_1 / c$, и $p_2 = \varepsilon_2 / c$, получим

$$m^2c^4 = \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)^2 - c^2\left(p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\theta\right),$$
$$m^2c^4 = \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)^2 - \left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\cos\theta\right),$$
$$m^2c^4 = 2\varepsilon_1\varepsilon_2\left(1 - \cos\theta\right) = 4\varepsilon_1\varepsilon_2\sin^2\frac{\theta}{2},$$
$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{mc^2}{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}.$$

Задача 2.28. Оценить пороговую энергию $\tilde{\varepsilon}$ фотона, необходимую для рождения электрон-позитронной пары, в присутствии покоящегося ядра массы M.

Решение. Для справки, пороговая энергия — это минимальная энергия, необходимая для протекания реакции.

Пусть K — лабораторная система отсчета, в которой покоится ядро. Первоначальная энергия системы «фотон — ядро» в K-системе

$$W = \varepsilon + Mc^2,$$

а импульс $p = \varepsilon / c$.

Опишем рожденную электрон-позитронную пару в поле ядра в системе их центра масс (C — системе отсчета):

$$W' = \left(M + 2m\right)c^2 + W_{\Sigma k}', \quad p_\Sigma' = 0,$$

где m — масса электрона (у позитрона масса такая же), $W_{\Sigma k}'$ — сумма кинетических энергий частиц в системе центра масс.

Используя инвариант (3), полученный в задаче 2.19, получим

$$\left(\varepsilon + Mc^2\right)^2 - \varepsilon = \left(\left(M + 2m\right)c^2 + W_{\Sigma k}'\right)^2.$$

На пороге реакции $W_{\Sigma k}{}' = 0$, и тогда

$$\left(\varepsilon + Mc^2\right)^2 - \tilde{\varepsilon} = \left(M + 2m\right)^2 c^4,$$

$$\tilde{\varepsilon} = 2mc^2\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Описанное здесь явление наблюдается при взаимодействии жесткого излучения с веществом, при котором возможно рождение пары электрон-позитрон в присутствии атомного ядра. Для рождения этой пары необходим фотон, энергия которого $\varepsilon \succ 2mc^2 = 1{,}02$ МэВ (длина волны такого излучения $\lambda \prec 1{,}2 \cdot 10^{-12}$ м). Пара рождается при поглощении фотона ядром. А какова же роль ядра в этом процессе? Чтобы ответить на этот вопрос, оценим возможность рождения такой пары в вакууме.

По закону сохранения импульса

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad p \le p_1 + p_2,$$

и по закону сохранения энергии

$$\varepsilon = W_1 + W_2,$$

$$cp = c\sqrt{p_1^2 + mc^2} + c\sqrt{p_2^2 + mc^2},$$

$$p \succ p_1 + p_2.$$

Мы получили два неравенства, взаимоисключающих друг друга, из чего следует, что рождение пары электрон-позитрон в вакууме невозможно. Все меняется, если рождение происходит в поле массивного ядра. Поглощая фотон, ядро забирает у него избыток импульса, практически не меняя энергетический баланс. Рождение пары становится возможным.

Электрон-позитронная пара может родиться и в отсутствие ядра из двух фотонов, но регистрация этого события весьма затруднительна.

Библиографический список

1. Валишев. М. Г. Курс общей физики : учебное пособие / М. Г. Валишев, А. А. Повзнер. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 576 с. — ISBN 978-5-8114-0820-7.
2. Савельев И. В. Курс общей физики : учебное пособие для втузов. В 5 кн. Кн. 1. Механика, Молекулярная физика / И. В. Савельев. — Москва: Астрель : АСТ, 2003. — 336 с. — ISBN 5-02-014430-4.
3. Иродов И. Е. Основные законы механики : учебное пособие / И. Е. Иродов. — Москва : Бином. Лаборатория знаний, 2014. — 309 с. — ISBN 978-5-9963-0063-1.
4. Иродов И. Е. Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. — Москва : Бином. Лаборатория знаний, 2012. — 432 с. — ISBN 5-93208-044-2.

Оглавление

Учебное издание

Малышев Леонид Григорьевич
Повзнер Александр Александрович

Механика и теория относительности. Задачи, их анализ и решение

Корректор З. Р. Бухонова
Верстка Е. В. Ровнушкиной

Подписано в печать 01.03.2021. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 8,4.
Уч.-изд. л. 5,0. Тираж 30 экз. Заказ 12.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13
Факс: 8 (343) 358-93-06
http://print.urfu.ru

ЛИДЕР УНИВЕРСИТЕТСКОГО КНИГОИЗДАНИЯ

УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КНИГА

2020

9 785799 631925